オブザーバの設計と入出力の線形化

三平満司（東京工業大学）

1 はじめに

ここではオブザーバの設計と入出力線形化について考える．ここで扱うシステムは次の状態方程式で表される１入力１出力系である．

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= f(x)+g(x)u &(1)\\
y &= h(x) &(2)
\end{aligned}
$$

2 オブザーバの設計

システムの状態が利用でない場合にはオブザーバを用いてシステムの状態を推定し，状態フィードバックを実現する必要がある．ここでは線形誤差応答オブザーバと指数オブザーバについて紹介する．

2.1 線形誤差応答オブザーバ

状態方程式の厳密な線形化問題の双対問題として，状態から出力までの厳密な線形化問題が定式化されている [1-4]．これが線形誤差応答オブザーバの設計方法である．

一般的にシステム (1) は座標変換

$$\xi = T(x) \tag{3}$$

により ξ 座標系でのシステム

$$
\begin{aligned}
\frac{d\xi}{dt} &= \frac{\partial \xi}{\partial x}\,\frac{dx}{dt}\\
&= \frac{\partial T}{\partial x}\{f(x)+g(x)u\}\\
&= \frac{\partial T}{\partial x}f(T^{-1}(\xi))+\frac{\partial T}{\partial x}g(T^{-1}(\xi))u\\
&\stackrel{\mathrm{def}}{=} \bar{f}(\xi)+\bar{g}(\xi)u\\
y &= h(T^{-1}(\xi)) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \bar{h}(\xi) &(4)
\end{aligned}
$$

に変換される．いま $\bar{f}(\xi), \bar{g}(\xi), \bar{h}(\xi)$ が

$$\bar{f}(\xi) = A\xi + p(y), \quad \bar{g}(\xi) = r(y), \quad \bar{h}(\xi) = C\xi \tag{5}$$

となるように座標変換 $T(x)$ が選ばれていると仮定する．つまり ξ 座標系でシステムが

$$
\begin{aligned}
\frac{d\xi}{dt} &= \{A\xi + p(y)\} + r(y)u\\
y &= C\xi &(6)
\end{aligned}
$$

に変換される（(C, A) 可観測）と仮定する．ここで状態方程式の非線形項である $p(y)$ と $r(y)$ が出力 y のみの関数であることに注意する．このシステムに対して次の同一次元オブザーバを考える．

$$\frac{d\hat{\xi}}{dt} = A\hat{\xi} + p(y) + r(y)u + K(C\hat{\xi} - y) \tag{7}$$

このときオブザーバ誤差を $\varepsilon = \xi - \hat{\xi}$ とすると ε の挙動は

$$
\begin{aligned}
\frac{d\varepsilon}{dt} &= \frac{d\xi}{dt} - \frac{d\hat{\xi}}{dt}\\
&= A(\xi - \hat{\xi}) + KC(\xi - \hat{\xi})\\
&= (A + KC)\varepsilon &(8)
\end{aligned}
$$

となり，非線形要素 $p(y), r(y)$ と入力 u の影響を受けない，厳密に線形な自律系で表わされることになる．さらに (C, A) が可観測であるから $(A + KC)$ の固有値は K により任意に設定できる．つまり，$\hat{\xi}$ の真値 ξ への収束の度合を任意に設定することができる．さらにもとの状態 x の推定値 $\hat{x}$ は

$$\hat{x} = T^{-1}(\hat{\xi}) \tag{9}$$

で求めることができる．

このようにシステム (1) を座標変換により (6) のシステムに変換できればオブザーバ誤差 ε の挙動が線形となるオブザーバを設計することができる．このようなオブザーバを線形誤差応答オブザーバと呼ぶことにする．これは状態ー出力間の厳密な線形化であり，座標変換でシステムをひねって，出力により観測できる非線形性を打ち消す線形化と考えることができる．

以下では簡単のため次の１出力の自律系

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= f(x)\\
y &= h(x) &(10)
\end{aligned}
$$

を考え，このシステムを座標変換 $\xi = T(x)$ により

$$
\begin{aligned}
\frac{d\xi}{dt} &= \bar{f}(\xi) = A\xi + p(y)\\
y &= \bar{h}(\xi) = C\xi &(11)
\end{aligned}
$$

なるシステム（(C, A) 可観測）に変換することを考える．システム (11) に対して誤差の挙動が線形になるオブザーバは

$$\frac{d\hat{\xi}}{dt} = A\hat{\xi} + p(y) + K(C\hat{\xi} - y) \tag{12}$$

で与えられ，オブザーバ誤差 $\varepsilon = \xi - \hat{\xi}$ は

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = (A + KC)\varepsilon \tag{13}$$

と線形システムで表わされる．

入力のあるシステム (1) は同じ座標変換 $T(x)$ により $\bar{g}(\xi) = (\partial T/\partial x)g(x)$ が $\bar{g}(\xi) = r(y)$ のように出力 y のみの関数で表わされるとき，オブザーバの厳密な線形化が可能となる．また，この条件を満たさない場合にも

$$\frac{d\hat{\xi}}{dt} = A\hat{\xi} + k(y) + \bar{g}(\hat{\xi})u + H(y - C\hat{\xi}) \tag{14}$$

とするならば，ある意味でこのシステムは基のシステムの指数安定オブザーバとなる [9].

Krener と Isidori[3] は線形誤差オブザーバの設計の可能性に関して次の定理が成り立つことを示した．ここでスカラー関数 $\phi(x)$ の外微分 $d\phi(x)$ は

$$d\phi(x) = \frac{\partial \phi}{\partial x} \tag{15}$$

で定義される行ベクトル値関数である．

【定理】

システム (10) に対して座標変換 $\xi = T(x)$ が存在して (10) が ξ 座標系で (11) と表わされるための必要十分条件は，次の 2 つの条件を同時に満たすことである．

a) $\{dh(x), dL_f h(x), \cdots, dL_f^{n-1} h(x)\}$ が任意の点 x において（実ベクトルの意味で）線形独立である．

b) ベクトル場 $\tau(x)$ を

$$\begin{pmatrix} dh(x) \\ dL_f h(x) \\ \vdots \\ dL_f^{n-2} h(x) \\ dL_f^{n-1} h(x) \end{pmatrix} \tau(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{16}$$

を満たす（唯一な）ベクトル場（縦ベクトル値関数）とするとき，次式が $0 \le i \le n-1;\ 0 \le j \le n-1$ に対して成り立つ．

$$[ad_f^i \tau(x), ad_f^j \tau(x)] = 0 \tag{17}$$

$\square$

定理の条件が満たされるとき $i = 1, 2, \cdots, n;\ j = 1, 2, \cdots, n$ で

$$L_{(-1)^{j-1} ad_f^{j-1} \tau} \phi_i(x) = \begin{cases} 0, & i \ne j \\ 1, & i = j \end{cases} \tag{18}$$

を満たすスカラー関数 $\phi_i(x)$, ($\phi_i(0) = 0$) が必ず存在することが証明されている．この $\phi_i(x)$ を用いてシステム (10) を (11) に変換する座標変換の一つは

$$\xi = T(x) = \begin{pmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \\ \vdots \\ \phi_n(x) \end{pmatrix} \tag{19}$$

で与えられ，この座標変換によりシステムは

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xi + \begin{pmatrix} p_1(y) \\ p_2(y) \\ p_3(y) \\ \vdots \\ p_n(y) \end{pmatrix} \\ y &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \xi \end{aligned} \tag{20}$$

となる．ここで

$$p_1(y) = L_f \phi_1(x) \tag{21}$$

$$p_i(y) = L_f \phi_i(x) - \phi_{i-1}(x) \quad i = 2, 3, \cdots, n \tag{22}$$

であり，これらの関数が出力 y の関数になることが証明されている．

線形システム $f(x) = Ax$, $h(x) = Cx$ の場合には

$$\begin{aligned} h(x) &= Cx \\ L_f h(x) &= \frac{\partial h}{\partial x} f(x) = CAx \\ L_f^2 h(x) &= \left\{ \frac{\partial}{\partial x} L_f h(x) \right\} f(x) = CA^2 x \\ &\vdots \\ L_f^{n-1} h(x) &= CA^{n-1} x \end{aligned} \tag{23}$$

より

$$\begin{aligned} dh(x) &= \frac{\partial h}{\partial x} = C \\ dL_f h(x) &= \frac{\partial}{\partial x} L_f h(x) = CA \\ dL_f^2 h(x) &= CA^2 \\ &\vdots \\ dL_f^{n-1} h(x) &= CA^{n-1} \end{aligned} \tag{24}$$

であるから，定理の条件 (a) はシステムの可観測性の条件と考えることができる．

多出力系のオブザーバの線形化は Krener と Respondek[4] により解かれている．

［例題］

次のシステムを考える．

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1^2 - x_1 x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ e^{x_1} \end{pmatrix} u \\
&\stackrel{\text{def}}{=} f(x) + g(x)u \qquad (25) \\
y &= x_1 \\
&\stackrel{\text{def}}{=} h(x)
\end{aligned}
$$

まず，$h(x)$ と $f(x)$ についてオブザーバの厳密な線形化を考える．

(定理の条件のチェック)

まず，定理の条件 (a) が満たされていることを確かめる．

$$
\begin{aligned}
h(x) &= x_1 \qquad (26) \\
L_f h(x) &= \frac{\partial h}{\partial x} f(x) = (1 \ \ 0) \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1^2 - x_1 x_2 \end{pmatrix} \\
&= x_2 \qquad (27)
\end{aligned}
$$

であるから

$$
\begin{aligned}
dh(x) &= \frac{\partial h}{\partial x} = (1 \ \ 0) \qquad (28) \\
dL_f h(x) &= \frac{\partial}{\partial x} L_f h(x) = (0 \ \ 1) \qquad (29)
\end{aligned}
$$

となり，$dh(x)$ と $dL_f h(x)$ は独立となる．よって定理の条件 (a) が満たされている．次に定理の条件 (b) について調べる．定理で定義されている (16) の $\tau(x)$ は

$$
\begin{pmatrix} dh(x) \\ dL_f h(x) \end{pmatrix} \tau(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tau(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (30)
$$

を満たすものだから

$$
\tau(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (31)
$$

と一意に定まる．また

$$
\begin{aligned}
ad_f^0 \tau(x) &= \tau(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (32) \\
ad_f^1 \tau(x) &= [f, ad_f^0 \tau](x) \\
&= \frac{\partial ad_f^0 \tau}{\partial x} f(x) - \frac{\partial f}{\partial x} ad_f^0 \tau(x) \\
&= 0 \cdot f(x) - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2x_1 - x_2 & -x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 \\ x_1 \end{pmatrix} \qquad (33)
\end{aligned}
$$

である．Lie bracket の定義より $[ad_f^i \tau, ad_f^i \tau](x) = 0$, $[ad_f^0 \tau, ad_f^1 \tau](x) = -[ad_f^1 \tau, ad_f^0 \tau](x)$ であるから，定理の条件 (b) は $[ad_f^0 \tau, ad_f^1 \tau](x)$ を計算するだけでチェックできる．$[ad_f^0 \tau, ad_f^1 \tau](x)$ を計算すれば

$$
\begin{aligned}
[ad_f^0 \tau, ad_f^1 \tau](x) &= \frac{\partial ad_f^1 \tau}{\partial x} ad_f^0 \tau(x) - \frac{\partial ad_f^0 \tau}{\partial x} ad_f^1 \tau(x) \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 \cdot ad_f^1 \tau(x) \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (34)
\end{aligned}
$$

となり，定理の条件 (b) が満たされていることがわかる．

(座標変換の決定)

(19) の座標変換を求める為に (18) を満たす $\phi_i(x)$ を求める．(18) は次のように表わすことができる．

$$
\begin{aligned}
&L_{ad_f^0 \tau} \phi_1(x) = 1, \quad L_{-ad_f^1 \tau} \phi_1(x) = 0 \qquad (35) \\
&L_{ad_f^0 \tau} \phi_2(x) = 0, \quad L_{-ad_f^1 \tau} \phi_2(x) = 1
\end{aligned}
$$

Lie 微分の定義にしたがってこれらの左辺を計算すれば

$$
\begin{aligned}
L_{ad_f^0 \tau} \phi_1(x) &= \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} \ \ \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} \qquad (36) \\
L_{-ad_f^1 \tau} \phi_1(x) &= \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} \ \ \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ -x_1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} - \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} x_1 \qquad (37) \\
L_{ad_f^0 \tau} \phi_2(x) &= \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} \ \ \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} \qquad (38) \\
L_{-ad_f^1 \tau} \phi_2(x) &= \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} \ \ \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ -x_1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} x_1 \qquad (39)
\end{aligned}
$$

であるから $\phi_i(x)$ は

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} = 1 \qquad (40) \\
&\frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} - \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} x_1 = 0 \qquad (41) \\
&\frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} = 0 \qquad (42) \\
&\frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} x_1 = 1 \qquad (43)
\end{aligned}
$$

を満たさなければならない．簡単な計算により次の関数 $\phi_i(x)$ がこれらの式を満たすことがわかる．

$$
\begin{aligned}
\phi_1(x) &= x_2 + \frac{1}{2} x_1^2 \qquad (44) \\
\phi_2(x) &= x_1 \qquad (45)
\end{aligned}
$$

これらの $\phi_i(x)$ を用いて (19) に従って座標変換 $\xi = T(x)$ を

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 + \frac{1}{2}x_1^2 \\ x_1 \end{pmatrix} \tag{46}$$

と定義する．この座標変換の逆変換は

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_2 \\ \xi_1 - \frac{1}{2}\xi_2^2 \end{pmatrix} \tag{47}$$

となる．この座標変換により元のシステムは

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{dx}{dt} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1^2 - x_1x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ e^{x_1} \end{pmatrix} u \right\} \\ &= \begin{pmatrix} -x_1^2 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{x_1} \\ 0 \end{pmatrix} u \qquad (48) \\ &= \begin{pmatrix} -\xi_2^2 \\ \xi_1 - \frac{1}{2}\xi_2^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{\xi_2} \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y &= x_1 = \xi_2 \end{aligned}$$

となる．$y = \xi_2$ であることに注意すれば，このシステムは

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \begin{pmatrix} -y^2 \\ \xi_1 - \frac{1}{2}y^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^y \\ 0 \end{pmatrix} u \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xi + \begin{pmatrix} -y^2 \\ -\frac{1}{2}y^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^y \\ 0 \end{pmatrix} u \\ &\stackrel{\text{def}}{=} A\xi + p(y) + r(y)u \qquad (49) \\ y &= (0,\ 1)\xi \\ &\stackrel{\text{def}}{=} C\xi \end{aligned}$$

と表わされ，(6) の形となる．このシステムの状態 ξ の推定値 $\hat{\xi}$ を推定するに対する線形誤差応答オブザーバは (7) で，状態 x の推定値 $\hat{x}$ は (9) と (47) より状態 ξ_i の推定値を $\hat{\xi}_i$ として

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\xi}_2 \\ \hat{\xi}_1 - \frac{1}{2}\hat{\xi}_2^2 \end{pmatrix} \tag{50}$$

により求められる．

2.2 指数オブザーバ

前節の線形誤差応答オブザーバは線形システム理論に帰着させるため，オブザーバゲイン K の設計や誤差応答の解析が容易である．しかし，オブザーバを設計可能なシステムが限られる．ここでは一般的なシステムにも対応できるオブザーバの設計方法を考える．

(1) に対して次のようなシステムを考える．

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = \hat{f}(\hat{x}, u, y) \tag{51}$$

ここで $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \cdots, \hat{x}_n)^T \in R^n$ とする．システム (51) がシステム (1) のオブザーバであるとはシステム (51) が以下の条件 A,B を満たすことである．

(条件 A)

ある時刻 t_0 において $\hat{x}(t_0) = x(t_0)$ ならばすべての $t \geq t_0$ において (入力 $u(t)$ と出力 $y(t)$ に関わらず)$\hat{x}(t) = x(t)$ となる．□

(条件 B)

$t \to \infty$ のとき $\hat{x}(t) \to x(t)$．□

これらの条件のうち (条件 A) はシステム (51) の形を以下のように仮定することにより容易に満たすことができる．

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = f(\hat{x}) + g(\hat{x})u + k(h(\hat{x}) - y) \tag{52}$$

ただしここで $k(\,\cdot\,)$ は

$$k(0) = 0 \tag{53}$$

を満たすものとする．このようなシステムはある時刻 t_0 で $\hat{x}(t_0) = x(t_0)$ となれば $y(t_0) = h(x(t_0)) = h(\hat{x}(t_0))$ より $k(h(\hat{x}(t_0)) - y(t_0)) = 0$ となり，$t \geq t_0$ で

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{x}}{dt} &= f(\hat{x}) + g(\hat{x})u \\ \hat{x}(t_0) &= x(t_0) \end{aligned} \tag{54}$$

と元のシステム (1) と同じ状態方程式，同じ初期値のシステムで表わされる．これは $t \geq t_0$ で $\hat{x}(t) = x(t)$，つまり条件 A が満たされることを示す．このように条件 A を満たすシステムを設計することは簡単なので，非線形システムに対するオブザーバの研究は如何に条件 B が満たされるようにシステムを設計するか，つまり (52) のオブザーバゲイン関数 $k(\cdot)$ を如何に求めるかという問題に帰着される．

条件 B を満たすように $k(\cdot)$ を求める問題はシステムの安定性に深く関わる問題である．しかし，非線形システムの安定性を簡単に保証する統一的理論（特に大域的な安定性）はまだ十分確立されていない．そのため条件 B を満たすオブザーバゲインを求める問題を解くことは容易ではなく，オブザーバの設計理論はどうしても各論的になってしまう．

さて，実際に有用なオブザーバは条件 B よりも強い条件 C を満たすものであり，指数オブザーバと呼ばれている．条件 B ではオブザーバ誤差 $\varepsilon = x - \hat{x}$ の漸近安定性しか要求していないのに対して条件 C では指数安定性を要求している．

(条件 C)

ある正の数 M, a が存在して $t>0$ で

$$\|x(t)-\hat{x}(t)\| \leq M\|x(0)-\hat{x}(0)\|e^{-at} \tag{55}$$

を満たす．□

このようなオブザーバの設計に関しては文献 [5-7] において議論されている．しかし，それらの議論の中心は安定論に関してであり，各論的なオブザーバの設計法を述べているにすぎない．つまり，ある特殊なシステムに対するオブザーバであるか，オブザーバの形を固定した場合の安定性についてである．

Kou ら [5] は非線形システムに対する指数オブザーバの概念を定義し，オブザーバの安定論を議論している．Kou らはオブザーバの指数安定論を Lyapnov 関数の存在性に帰着させ以下の定理を与えた．入力のない（多出力）システム

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x) \\ y &= h(x) \end{aligned} \tag{56}$$

に対して

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = f(\hat{x}) + K\{h(\hat{x})-y\} \tag{57}$$

(K は定数行列) なるオブザーバ（の候補）を考える．

【定理】

正定な行列 $P>0$ と正数 $\varepsilon>0$ が存在して

$$P(\frac{\partial f}{\partial x}+K\frac{\partial h}{\partial x})+(\frac{\partial f}{\partial x}+K\frac{\partial h}{\partial x})^T P \leq -2\varepsilon I \tag{58}$$

をすべての x において満たすとする．このとき (57) は (56) の指数オブザーバとなり，

$$\|\hat{x}(t)-x(t)\| \leq \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1/2} \|\hat{x}(0)-x(0)\|e^{-(\varepsilon/p_2)t} \tag{59}$$

を満たす．ただしここで p_1, p_2 はそれぞれ P の最小，最大固有値である．□

この定理は大域的なオブザーバの安定性を論じているが局所的な議論をすれば以下のように考えることができる．システム (56) の近似線形化システムを考える．

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax + O^2(x) \\ y &= Cx + O^2(x) \end{aligned} \tag{60}$$

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}|_{x=0}, \qquad C = \frac{\partial h}{\partial x}|_{x=0}$$

これを用いてオブザーバ (57) のゲイン K を $(A+KC)$ が十分安定になるように設計すれば，原点 $x=0, \hat{x}=0$ の近傍に状態 $x, \hat{x}$ が留まる限り，システム (57) が指数オブザーバになることを定理は示している．

2.3 積極的に非線形性を打ち消すオブザーバ

基のシステム (1) に対する従来型の非線形オブザーバの一般形は前節の (52) である．しかし，基のシステムが

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x,y)+g(x,y)u \\ y &= h(x) \end{aligned} \tag{61}$$

で表されている場合（状態方程式の一部に出力 y を陽に含む場合）には

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = f(\hat{x},y)+g(\hat{x},y)u+k(y-h(\hat{x})) \tag{62}$$

のように出力で分かる非線形性を積極的に打ち消すオブザーバの設計法も考えられる．後は誤差応答が指数安定となるように $k(\cdot)$ を決定すればよい．

3 オブザーバを用いたフィードバック系の安定性

一般に状態フィードバックを設計するときには状態が利用可能と仮定して，出力方程式 $y=h(x)$ を無視する．また，本解説でオブザーバを設計するときには入力を無視して，入力が存在しないシステムを考えていた．これらを組み合わせた補償器により閉ループ系が安定となることは次の定理により保証されている [9].

【定理】

$u=\zeta(x)$ をシステム (1) の原点 $x=0$ を漸近安定平衡点する状態フィードバックとする．またシステム

$$\dot{\hat{x}} = \gamma(\hat{x},y) \tag{63}$$

が

$$\gamma(x,h(x)) = f(x) \tag{64}$$

を満たし，かつ $\hat{x}=0$ が

$$\dot{\hat{x}} = \gamma(\hat{x},0) \tag{65}$$

の指数安定な平衡点であるとする．このときシステム (1) を

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= \gamma(\hat{x},y)+g(\hat{x})u \\ u &= \zeta(\hat{x}) \end{aligned} \tag{66}$$

なる補償器により制御すれば，閉ループ系において $(x,\hat{x}) = (0,0)$ は漸近安定な平衡点となる．□

定理の (64) は基のシステムが (1)(2) で表されている場合にはシステム (63) が

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} \;=\; \gamma(\hat{x},y) \;&=\; f(\hat{x})+k(h(\hat{x})-y) \\ k(0) &= 0 \end{aligned} \tag{67}$$

の形をしていれば常に成り立つ．また，基のシステムが (61) で表されている場合には (63) を

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= \gamma(\hat{x}, y) = f(\hat{x}, y) + k(h(\hat{x}) - y) \\ & k(0) = 0 \end{aligned} \tag{68}$$

と選べば常に成り立つ．これらはシステム (63) が入力のないシステム（(1)(2) の場合には $dx/dt = f(x)$, $y = h(x)$, (61) の場合には $dx/dt = f(x, y)$, $y = h(x)$）に対してオブザーバの条件 A を満たしていることを示している．また (65) は出力 y が恒等的に零の場合のシステム (63) の指数安定性を求めている．これは指数オブザーバの条件 C より弱いオブザーバの収束（安定）条件と考えることができる．つまり，厳密さを要求しないならば (63) はシステム (1) の入力を無視したシステム（入力を恒等的に零としたシステム）の指数オブザーバと考えることができる．また (66) の状態方程式は $\gamma(\hat{x}, y)$ を (67) の形に選んだ場合には

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = f(\hat{x}) + g(\hat{x})u + k(h(\hat{x}) - y) \tag{69}$$

となり，入力を考慮したオブザーバ (52) の形をしていることが分かる．これは入力を無視したオブザーバ (67) を基に入力を考慮したオブザーバ (52) を設計したことになる．(61) で表されるシステムに対して (68) を用いて場合も同様である．

この定理はシステム (1) を漸近安定化する状態フィードバック $u = \zeta(x)$ を指数安定なオブザーバを用いて $u = \zeta(\hat{x})$ で実現すれば，少なくとも原点 $(x, \hat{x}) = (0, 0)$ は漸近安定な平衡点になる，つまり，原点近傍に初期値がある限り，閉ループ系の状態 $(x, \hat{x})$ が原点に収束することを示している．

ここでの議論は原点が安定な平衡点であるか否かだけであるので，原点に収束する状態空間の範囲や，その応答がどうなるかについては議論していない．そのため，厳密な線形化を用いて設計した状態フィードバックと線形誤差応答をもつオブザーバを用いた補償器の有効範囲と閉ループ系の挙動が近似線形システムに比べて改善されるどうかは一般的には分からない．しかし，状態フィードバックとオブザーバの有効範囲が広ければ，これらを組み合わせた補償器の有効範囲も広くなることが期待できる．

さて，この定理で重要なことは状態フィードバックには漸近安定性だけが要求されているのに対してオブザーバには漸近安定性より強い指数安定性が要求されていることである．これが逆の場合，つまり，状態フィードバック $u = \zeta(x)$ がシステムを指数安定化しても，オブザーバ (65) が漸近安定ではあるが指数安定ではない場合には，これらを組み合わせた補償器 (66) によって原点が不安定な平衡点になる場合があるので注意が必要である [9]．ただし，ここで設計したオブザーバはすべて指数安定性が補償されるので問題はない．

4　入出力関係の線形化

ここではフィードバックを用いて入出力関係のみを線形化することを考える．１入出力系の入出力の厳密な線形化手法は入力 u が現われるまで出力 y を繰り返し時間微分し，u が現われた時点で非線形性をすべてキャンセルするようにフィードバックを決定するというものである．

１入力１出力システム (1) において次を満たす自然数 ρ が存在すると仮定する．

$$L_g L_f^i h(x) = 0, \qquad i = 0, 1, \cdots, \rho - 2 \tag{70}$$

$$L_g L_f^{\rho-1} h(x) \neq 0, \qquad \forall x \tag{71}$$

このような ρ が存在するとき，出力 $y = h(x)$ の時間微分を繰り返せば

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial h}{\partial x}\frac{dx}{dt} \\ &= \frac{\partial h}{\partial x}(f(x) + g(x)u) \\ &= L_{f+gu}h(x) \\ &= L_f h(x) + uL_g h(x) \\ &= L_f h(x) \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{d}{dt}\frac{dy}{dt} \\ &= \frac{d}{dt}L_f h(x) \\ &= L_{f+gu}L_f h(x) \\ &= L_f L_f h(x) + uL_g L_f h(x) \\ &= L_f^2 h(x) \\ &\ \vdots \\ \frac{d^{\rho-1}y}{dt^{\rho-1}} &= L_f^{\rho-1}h(x) + uL_g L_f^{\rho-2}h(x) \\ &= L_f^{\rho-1}h(x) \\ \frac{d^\rho y}{dt^\rho} &= L_f^\rho h(x) + uL_g L_f^{\rho-1}h(x) \end{aligned} \tag{72}$$

を得る．ρ の定義より $L_g L_f^{\rho-1}h(x) \neq 0$ であるから，出力 y を ρ 階時間微分したときに初めて入力 u が影響したことになる．これは ρ が線形システムにおける相対次数に相当することを示している．新しい入力を v としてフィードバックを

$$\begin{aligned} u &= \alpha(x) + \beta(x)v \\ &= \frac{-L_f^\rho h(x)}{L_g L_f^{\rho-1}h(x)} + \frac{1}{L_g L_f^{\rho-1}h(x)}v \end{aligned} \tag{73}$$

と定義すれば明らかに

$$\frac{d^\rho y}{dt^\rho} = v \tag{74}$$

となる．いま状態の一部 ξ を

$$\xi = \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \\ \vdots \\ \frac{d^{\rho-1}y}{dt^{\rho-1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ \vdots \\ L_f^{\rho-1} h(x) \end{pmatrix} \tag{75}$$

と定義し，残りの状態関数 $\eta = T_2(x)$ を

$$x \mapsto \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \tag{76}$$

が座標変換になる（逆関数が存在する）ように決定できたとすればフィードバックを施したシステムの状態方程式は

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= A\xi + Bv \\ \frac{d\eta}{dt} &= \zeta_1(\xi,\eta) + \zeta_2(\xi,\eta)v \\ y &= C\xi \end{aligned} \tag{77}$$

となる．ここで

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \\ B &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ C &= (1\ 0\ \cdots\ 0\ 0) \\ \zeta_1(\xi,\eta) &= L_{\tilde{f}} T_2(x) \\ \zeta_2(\xi,\eta) &= L_{\tilde{g}} T_2(x) \\ \tilde{f}(x) &= f(x) + g(x)\alpha(x) \\ \tilde{g}(x) &= g(x)\beta(x) \end{aligned} \tag{78}$$

である．このようにシステムはフィードバックと座標変換により線形可観測な状態 ξ と非線形不可観測な状態 η に分解されている．入出力に着目すればこのシステムは線形である．また，この非線形不可観測な状態 η が安定であるならば，線形な部分 ξ のみを安定化することにより，システム全体を安定化することができる．このようなシステムは線形システムの最小位相系に相当する．

非線形不可観測な状態 η の挙動は zero dynamics と呼ばれ，線形システムの零点と対応している．

このように入出力の線形化は入出力関係に関係するところのみを線形化し，非線形性の残る部分は不可観測にして（臭いところに蓋をして）入出力に現れないようにする線形化と考えることができる．

［例題］

例として次のシステムの入出力線形化問題を考える．

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \tan x_2 \\ x_3 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y &= x_1 \end{aligned} \tag{79}$$

出力 y を時間微分すれば

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{dx_1}{dt} \\ &= \tan x_2 \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{d}{dt}\,\frac{dy}{dt} \\ &= \frac{d}{dt}\tan x_2 \\ &= \left\{\frac{\partial}{\partial x_2}\tan x_2\right\}\,\frac{dx_2}{dt} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x_2}\,\frac{dx_2}{dt} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x_2}(x_3 + u) \\ &= \frac{x_3}{\cos^2 x_2} + \frac{1}{\cos^2 x_2}u \end{aligned}$$

となる．このとき y を 2 階時間微分したときに初めて入力 u が現われていることに注意する．ここで新しい座標 ξ_1, ξ_2 とフィードバック（v は新しい入力）を

$$\begin{aligned} \xi_1 &= y = x_1 \\ \xi_2 &= \frac{dy}{dt} = \tan x_2 \\ u &= -x_3 + (\cos^2 x_2)v \end{aligned}$$

と定義すると

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} v \\ y &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

なる線形状態方程式と線形出力方程式を得る．つまりシステムの入力から出力までが線形化されていることがわかる．もとのシステム (79) が 3 次のシステムであるのに対して線形化されたシステムが 2 次であることから，線形化する際に不可観測な状態が生まれていることがわかる．こ

の例における不可観測な状態は x_3 である．線形化フィードバックを施したときの x_3 の挙動は

$$\begin{aligned}\frac{dx_3}{dt} &= x_1x_2+u\\ &= x_1x_2+\{-x_3+(\cos^2 x_2)v\}\\ &= \xi_1\tan^{-1}\xi_2-x_3+\{\cos^2(\tan^{-1}\xi_2)\}v\end{aligned}$$

で表わされるが，この状態は出力に影響しない．また，$\xi=0$，$v=0$ の時の状態 x_3 は

$$\frac{dx_3}{dt} = -x_3$$

となるので安定である．つまり，非線形かつ不可観測な状態 x_3 は安定である．この場合には線形化された状態 ξ を安定化することによりシステム全体を安定化することができる．

多入出力システムの入出力線形化する方法は Isidori と Ruberti[10] によりボルテラ級数展開を用いて定式化され，構造アルゴリズムを用いて解かれている．詳細については [1,2] が詳しい．

5　おわりに

ここではオブザーバの設計，状態フィードバック＋オブザーバ併合系の安定性，入出力線形化について解説した．状態方程式の線形化も含めて，これらの手法は如何に頭を柔らかくして非線形性に対処するかということになると考える．状態フィードバックの設計では嫌らしい非線形性を状態フィードバックでたたきつぶし，座標変換でひねることにより線形にし，オブザーバの設計では測定できる非線形性（出力の関数）は出力で打ち消し，はたまた入出力線形化では非線形でいやな部分は不可観測にして入出力関係から追いやっている．

ここで述べた手法の根底になっている考え方を理解していれば，たとえ，ここで述べた方法が使えないシステムの設計をしなくてはならなくなったとしても，新しい創造的な制御系の設計が可能となるものと確信している．

参考文献

[1] 石島, 石動, 三平, 島, 山下, 渡辺: 非線形システム論, 計測自動制御学会 (1993)

[2] A.Isidori: Nonlinear Control Systems, Springer-Verlag (1st ed. 1985, 2nd ed. 1989)

[3] A.J.Krener and A.Isidori: Linearization by Output Injection and Nonlinear Observers, Systems and Control Letters, vol.3, 47/52 (1983)

[4] A.J.Krener and W.Respondek: Nonlinear Observers with Linearizable Error Dynamics, SIAM J.of Control and Optimization vol.23, no.2, 197/216 (1985)

[5] S.R.Kou, D.L.Elliott and T.J.Tarn: Exponential Observers for Nonlinear Dynamic Systems, Information and Control, vol.29, 204/216 (1975)

[6] S.P.Banks: A Note on Non-Linear Observers, Int. J. of Control, vol.34, no.1, 185/190 (1981)

[7] X.Xia and W. Gao: On Exponential Observers for Nonlinear Systems, Systems and Control Letters, vol.11, 319/325 (1988)

[8] 三平, 石川: 非線形オブザーバを用いた車両の位置推定, 第２３回制御理論シンポジウム, 297/300 (1994)

[9] C.I.Byrnes and A.Isidori: Steady State Response, Separation Principle and the Output Regulation of Nonlinear Systems, Proc.of the 28th CDC, 2247/2251 (1989)

[10] A.Isidori and A.Ruberti: On the Synthesis of Linear Input-Output Responses for Nonlinear Systems, Systems and Control Letters, vol.4, no.1, 17/22 (1984)