

実用的な H_∞ 制御理論の基礎

東京工業大学

三平満司

1 はじめに

これまでフィードバック制御と言えば周波数領域でコントローラを設計する古典制御や、状態方程式を基にした現代制御理論などがあった。それに対して近年、制御理論の分野で H_∞ 制御が注目され、応用例が増えている。

H_∞ 制御が注目される一番の理由は従来の制御理論では困難であった次の2つのことが容易にできることである。

1. ロバスト安定化（数値モデルと実際の制御対象の間に誤差があっても、実際の制御対象を安定化するコントローラを設計できる）
2. 周波数領域で制御仕様を記述できる（閉ループ系の周波数応答を指定できる）

ここではこの H_∞ 制御をどのように利用すればよいのかについて応用する立場にたつて解説する。そのため解説の主題を設計のための制御仕様の設定の仕方と、標準問題への変形に絞り、設計の理論についてはここでは述べない（標準問題の求解は市販の MATRIXx や MATLAB, フリーソフトウエアの MaTX[10] (<http://matx.mei.titech.ac.jp/>, 著者の研究室ではこれを用いている。) を用いることとする.)。理論に興味のある読者は [1-7] の解説を参照されたい。また本解説は文献 [8] の抜粋を元にノウハウなどを書き加えたものである。

2 H_∞ 制御

本解説で考える H_∞ 制御とは H_∞ ノルムで記述された制御仕様を満たすようにコントローラを設計することである。この制御仕様の意味を説明するために、まず H_∞ ノルムを定義する。

2.1 H_∞ ノルム

安定な 1 入力 1 出力の伝達関数 $G(s)$ の H_∞ ノルム $\|G(s)\|_\infty$ は次のように定義されている。

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_{\omega} |G(j\omega)| \quad (1)$$

ここで \sup_{ω} は上限値を意味し、厳密さを要求しなければ \max_{ω} (最大値) と置き換えられる。つまり、 $\|G(s)\|_\infty$ は伝達関数 $G(s)$ の $s = j\omega$ におけるゲインの最大値である。これは

$$|G(j\omega)| \leq \|G(s)\|_\infty, \quad \forall \omega \quad (2)$$

であることも示している。この様子をボード線図上で考えれば図 1 のようになる。

この H_∞ ノルムは次のような物理的意味も持っている。システムの伝達関数を $G(s)$ 、入力を u 、出力を y とし、

$$y = G(s)u \quad (3)$$

とするとき H_∞ ノルムは

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_u \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \|y(t)\|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} \|u(t)\|^2 dt} \quad (4)$$

を満たす。また

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_{\text{入力}} \frac{\text{出力パワー}}{\text{入力パワー}} \quad (5)$$

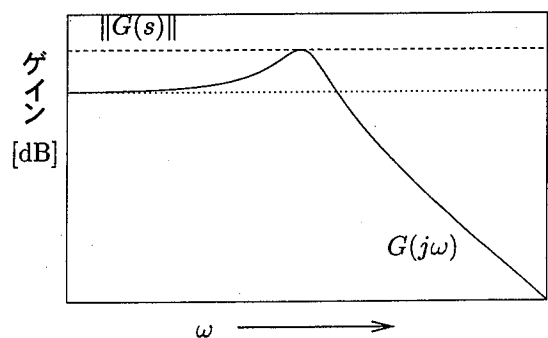


図 1: ボード線図上での H_∞ ノルム

を満たすことが知られている。つまり、 $\|G(s)\|_\infty$ は最悪入力に対する最悪（最大）出力の大きさを示していると考えることができる。

安定な多入力多出力の伝達関数 $G(s)$ の H_∞ ノルム $\|G(s)\|_\infty$ は 1 入力 1 出力系の拡張として次のように定義されている。

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_\omega \bar{\sigma}\{G(j\omega)\} \quad (6)$$

ここで $\bar{\sigma}\{G(j\omega)\}$ は $G(j\omega)$ の最大特異値、つまり $G(j\omega)^*G(j\omega)$ の最大固有値の平方根を表わしている ($G(j\omega)^*$ は $G(j\omega)$ の共役転置を示す)。

多入出力系の H_∞ ノルムで覚えておかなければならない性質は次だけである (最大特異値の性質から容易に証明できる)。

$$\|G_i(s)\|_\infty \leq \left\| \begin{pmatrix} G_1(s) & G_2(s) \\ G_3(s) & G_4(s) \end{pmatrix} \right\|_\infty \quad (7)$$

$i = 1, 2, 3, 4$

2.2 H_∞ 制御問題の制御仕様

H_∞ 制御問題ではシステムを安定にするのみでなく、 H_∞ ノルムで表わされた制御仕様を満たすようにコントローラを設計することが目標となる。この制御仕様が LQG など既存の制御理論に比べ直感的であり、意味のある制御仕様を与え易い。これが H_∞ 制御が注目されている理由でもある。

図 2 に示す制御系を考える。図 2 において $P(s)$ は制御対象を、 $K(s)$ はコントローラを示すものとする。また、制御対象の入力を u 、出力を y とし、 w を外部入力とする。簡単のため $P(s)$ は 1 入力 1 出力のシステムであると仮定するが、これからの解説は一般の多入出力系にもそのまま用いることができる。

2.2.1 感度低減問題と周波数伝達関数の整形

まず、図 2 において w が制御対象の出力 y の目標値であったと仮定する。このとき、制御の目的は $y \rightarrow w$ であるから $y - w = z_1 \rightarrow 0$ とすることができれば出力 y を目標値 w に追従させることができる。この制御は w から z_1

までの伝達関数が

$$z_1 = -S(s)w \quad (8)$$

$$S(s) = \frac{1}{1 + P(s)K(s)} \quad (9)$$

と表わされることから $\|S(s)\|_\infty$ ($= \|-S(s)\|_\infty$) をできるだけ小さくすることにより達成できる ($S(s)$ のゲインが小さければ $z_1 = y - w$ が小さい、つまり、目標値と出力の偏差が小さくなる)。この関数 $S(s)$ は感度関数と呼ばれている。

このように追従特性に着目した制御系の評価をしたいのならば、評価関数 J として $J = \|S(s)\|_\infty$ を選び、この評価関数を最小化 (またはある値 γ 未満に) することを考えればよい。しかし、一般に $S(s)$ をすべての帯域 (すべての周波数 ω) で小さくすることは現実的ではない。 $S(s)$ をすべての帯域で小さくすることは、すべての周波数 ω の信号に対して制御対象の出力が追従することを意味するが、例えば数十 [Kg] のロボットの腕が 50 [Hz] の目標値信号に追従している様子は考えるだけで恐ろしい。ロボットの腕は高々数 [Hz] 程度の目標値信号に追従すればよい。逆に、それ以上の周波数の信号に追従するとモーターなどにかなりの負担がかかり、実現は不可能となる。そこで、一部の周波数帯域の目標値信号のみ (通常は低域の信号) に出力が追従する制御系を設計する必要がある。そのためには出力が追従すべき帯域で感度関数 $S(s)$ のゲインを小さくすればよい (この帯域で $z_1 = y - w$ が小さくなる)。このような感度関数を得るために次の周波数重み伝達関数 $W(s)$ を用いた制御仕様を考える。

$$\|W(s)S(s)\|_\infty < 1 \quad (10)$$

図 3 の w から z までの伝達関数は $-W(s)S(s)$ であるから、この問題は図 3 の w から z までの伝達関数の H_∞ ノルムを 1

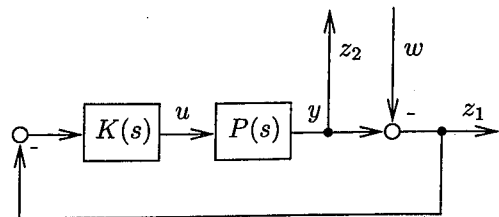


図 2: 制御系

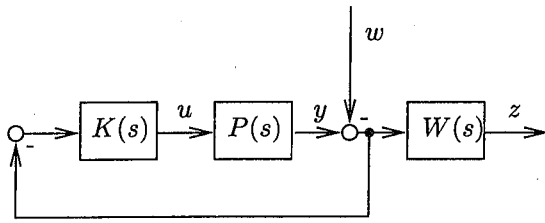


図 3: 周波数重み付き感度低減化問題

未満にする問題と考えることができる ($\|W(s)S(s)\|_{\infty} = \|-W(s)S(s)\|_{\infty}$ だから).

さて, $\|W(s)S(s)\|_{\infty} < 1$ とできたとすれば H_{∞} ノルムの定義 (1) より

$$|W(j\omega)S(j\omega)| < 1 \quad \forall \omega \quad (11)$$

となる. つまり

$$|S(j\omega)| < \frac{1}{|W(j\omega)|} \quad \forall \omega \quad (12)$$

となる. この様子をボード線図上に表わせれば図 4 のようになる.

図に示すように感度関数 $S(s)$ のボード線図のゲイン線図は周波数重み伝達関数 $1/W(s)$ のゲイン線図未満に整形されることになる. 言い替えば $|W(j\omega)|$ が十分大きい周波数 ($1/|W(j\omega)|$ が十分小さい周波数) では $|S(j\omega)| \approx 0$ となる (ボード線図上の $S(j\omega)$ のゲイン ($20 \log |S(j\omega)|$ [dB]) が $\ll 0$ [dB] となることは $|S(j\omega)| \approx 0$ を意味している). 感度関数 $S(s)$ の定義より, このような周波数帯域の目標値信号に対して偏差 $z_1 = y - w$ が小さくなる, つまり出力 y が目標値 w に追従するようになる. このように周波数重み伝達関数 $W(s)$ を用いることにより感度関数 $S(s)$ の周波数応答 (ボード線図) を整形することが可能となる.

周波数伝達関数の整形の場合には, ここで示したようにゲインにのみ着目し, 位相のことは考えにいていない. 古典制御理論を勉強した人はこのことを不審に思うようであるが, このことを気にかける必要はない.

古典制御理論の場合, 一巡伝達関数 (ここでは $P(s)K(s)$) のゲイン余有, 位相余有が望ましい値になるようにコントローラ $K(s)$ を設計する. そのため, 一巡伝達関数 $P(s)K(s)$ の位相に注意を払う. しかし, これらの概念はあくまで開ループ系 (一巡伝達関数 $P(s)K(s)$) に対して定義されたものである. そして, これら開ループ

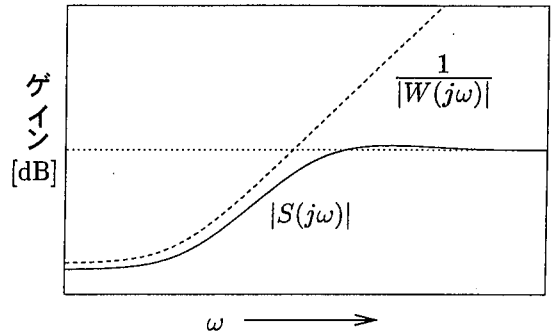


図 4: 感度関数の整形

系 (一巡伝達関数) のゲイン余有と位相余有を調整することより, 閉ループ系の伝達関数の特性 (感度関数 $S(s)$) を改善している. これに対してここでは直接的に閉ループ系の伝達関数 (感度関数 $S(s)$) を調整しているので, 位相余有等の概念は必要なくなっているのである.

2.2.2 ロバスト安定化問題 (相補感度関数)

実際の制御対象を制御するときには一般に制御対象 $P_r(s)$ の数値モデル $P(s)$ をつくり, それに基づいてコントローラ $K(s)$ を設計する. しかし実際の制御対象 $P_r(s)$ と数値モデル $P(s)$ の間にはどうしても誤差 $\Delta_a(s) = P_r(s) - P(s)$ がある. そのため数値モデル $P(s)$ に基づいて設計されたコントローラが実際の制御対象 $P_r(s)$ も安定化するようにコントローラを設計しなければならない. つまり, 実際の制御対象と数値モデルの間の不確かさに対してロバストなコントローラ (モデル誤差があっても安定化できるコントローラ) を設計する必要がある. この問題を数式的に表現すると次のようになる.

制御したい制御対象の実際の伝達関数を $P_r(s)$, 制御対象の数値モデル (公称値) の伝達関数を $P(s)$ (既知) とする. また $P_r(s)$ は未知であるが $P(s)$ に対して

$$P_r(s) = P(s) + \Delta_a(s) \quad (13)$$

と加法的誤差 $\Delta_a(s)$ を用いて表されるとする. ここで $P_r(s)$ と $P(s)$ の不安定な極の数は等しく, $\Delta_a(s)$ が

$$|\Delta_a(j\omega)| < |r_a(j\omega)|, \quad \forall \omega \quad (14)$$

と既知な安定伝達関数 $r_a(s)$ の大きさで制限されているとする (多入出力系では $\bar{\sigma}\{\Delta_a(j\omega)\} < |r_a(j\omega)|$). これは

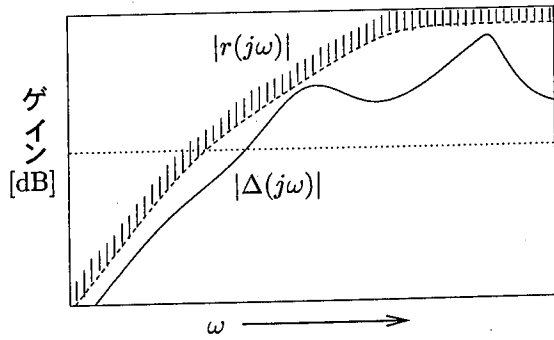


図 5: 制御対象の不確かさ

ボード線図上では図 5 のようになっていることを示している。

ロバスト安定化の問題は (14) を満たす任意の誤差 $\Delta_a(s)$ により (13) で表されたすべての制御対象 $P_r(s)$ に対して閉ループ系が安定となるようなコントローラ $K(s)$ を設計することである。図 2 を安定化するコントローラ $K(s)$ を設計するとき、加法的誤差 $\Delta_a(s)$ を考えに入れると実際の閉ループ系は図 6 と表せる。

ナイキストの安定定理を用いると $K(s)$ が $\Delta_a(s) \equiv 0$ の場合 ($P_r(s) = P(s)$ の場合) に図 6 を安定化し、かつ

$$\left\| r_a(s) \frac{K(s)}{1+P(s)K(s)} \right\|_{\infty} < 1 \quad (15)$$

であるならば、 $\Delta_a(s)$ に関わらず図 6 の閉ループ系が安定となることを証明できる (付録参照)。

このように加法的な誤差に対するロバスト安定化は H_{∞} ノルムを用いて、(15) を満たすようにコントローラ $K(s)$ を設計する問題として定式化できる。

さて、図 7 の w から z までの伝達関数は $-[r_a(s)K(s)]/[1+P(s)K(s)]$ となるので、加法的な不確かさに対するロバスト安定化はこの伝達関数の H_{∞}

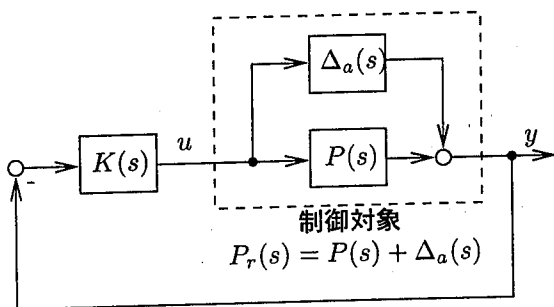


図 6: 加法的な不確かさのあるシステム

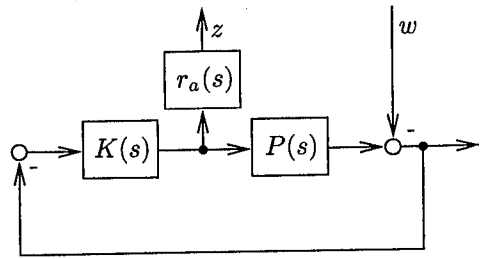


図 7: ロバスト安定化問題 (加法的な不確かさ)

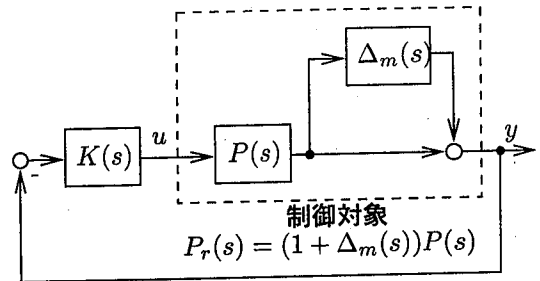


図 8: 乗法的な不確かさのあるシステム

ノルムを 1 未満にする問題と考えることができる (図 7 は図 6 の $\Delta_a(s)$ の部分を取り外し、 $\Delta_a(s)$ から出た信号に対応する部分を w 、 $\Delta_a(s)$ に入る信号に対応する部分に周波数重み伝達関数 $r_a(s)$ をかけたものを z とする形になっている)。

今までは実際の制御対象と数値モデルの誤差を加法的なものとして処理したが、次のように乗法的誤差と考えることもできる。

$$P_r(s) = (1 + \Delta_m(s))P(s) \quad (16)$$

この場合にも乗法的誤差 $\Delta_m(s)$ は

$$|\Delta_m(j\omega)| < |r_m(j\omega)|, \quad \forall \omega \quad (17)$$

と安定な伝達関数 $r_m(s)$ の大きさに制限されているとする。また、 $P_r(s)$ と $P(s)$ の不安定極の数が等しいと仮定する。

図 2 を安定化するコントローラ $K(s)$ を設計するとき、乗法的誤差 $\Delta_m(s)$ を考えに入れると実際の閉ループ系は図 8 と表せる。この場合にも加法的誤差の場合と同様にナイキストの安定定理を用いれば $K(s)$ が $\Delta_m(s) \equiv 0$ の場合 ($P_r(s) = P(s)$ の場合) に図 8 を安定化し、かつ

$$\left\| r_m(s) \frac{P(s)K(s)}{1+P(s)K(s)} \right\|_{\infty} < 1 \quad (18)$$

であるならば、 $\Delta_m(s)$ に関わらず図8のシステムが安定となることが証明できる（付録参照）。

ここで

$$T(s) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{P(s)K(s)}{1+P(s)K(s)} \quad (19)$$

と定義すれば(18)は

$$\|r_m(s)T(s)\|_{\infty} < 1 \quad (20)$$

となり、これを満たすようにコントローラ $K(s)$ を設計する問題が乗法的誤差に対するロバスト安定化問題となる。この $T(s)$ は相補感度関数と呼ばれるものであり、図2では w から z_2 までの伝達関数である。

さて、図9の w から z までの伝達関数は $-r_m(s)T(s)$ となるので、乗法的不確かさに対するロバスト安定化はこの伝達関数の H_{∞} ノルムを1未満にする問題と考えることができる（図9は図8の $\Delta_m(s)$ の部分を取り外し、 $\Delta_m(s)$ から出た信号に対応する部分を w 、 $\Delta_m(s)$ に入る信号に対応する部分に周波数重み伝達関数 $r_m(s)$ をかけたものを z とする形になっている）。

2.2.3 混合感度問題

2.2.1 節では閉ループ系の目標値追従特性に着目すれば $\|W(s)S(s)\|_{\infty} < 1$ となるように、2.2.2 節ではロバスト安定化のためには $\|r_m(s)T(s)\|_{\infty} < 1$ となるようにコントローラ $K(s)$ を設計すればよいことを示した。

一般的に制御においては目標値追従特性、ロバスト安定化ともに重要な特性であるので両方の特性を考慮して制御系を設計することが望まれる。しかし、これらを個別に満たすコントローラを求めることは現時点では大変であるの

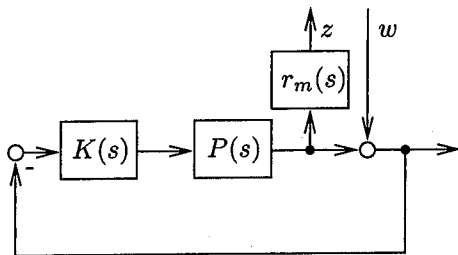


図9: ロバスト安定化問題（乗法的不確かさ）

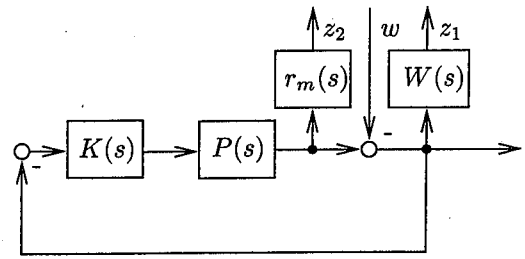


図10: 混合感度問題

で、次のような混合感度問題を考える。

$$\left\| \begin{pmatrix} W(s)S(s) \\ r_m(s)T(s) \end{pmatrix} \right\|_{\infty} < 1 \quad (21)$$

これを満たすコントローラ $K(s)$ を求めることができれば、多入力多出力系の H_{∞} ノルムの性質(7)より

$$\|W(s)S(s)\|_{\infty} < 1, \quad \|r_m(s)T(s)\|_{\infty} < 1 \quad (22)$$

となり、所望の性質を満たす。図10の w から $z = (z_1, z_2)^T$ までの伝達関数は

$$\begin{pmatrix} -W(s)S(s) \\ r_m(s)T(s) \end{pmatrix} \quad (23)$$

であり、

$$\left\| \begin{pmatrix} W(s)S(s) \\ r_m(s)T(s) \end{pmatrix} \right\|_{\infty} = \left\| \begin{pmatrix} -W(s)S(s) \\ r_m(s)T(s) \end{pmatrix} \right\|_{\infty} \quad (24)$$

であることから、混合感度問題は図10の w から $z = (z_1, z_2)^T$ までの伝達関数の H_{∞} ノルムを1未満にする問題と考えることができる。

図10において信号 w が2つの意味で用いられていることに注意されたい。感度関数の観点から見ればこの信号は目標入力であるし、相補感度関数から見ればこれは不確かさを評価するための仮想的な信号である。また、別の見方をすれば、この信号は物理的意味よりも、望ましい評価伝達関数(23)を与える信号として用いられていると考えることもできる。 H_{∞} 制御では信号の意味が見方によって変わってくるのでフレキシブルに考える必要がある。

さて、この混合感度問題を設定する場合には次のような注意が必要である。感度関数 $S(s)$ と相補感度関数 $T(s)$ の定義より明らかに

$$S(s) + T(s) = 1 \quad (25)$$

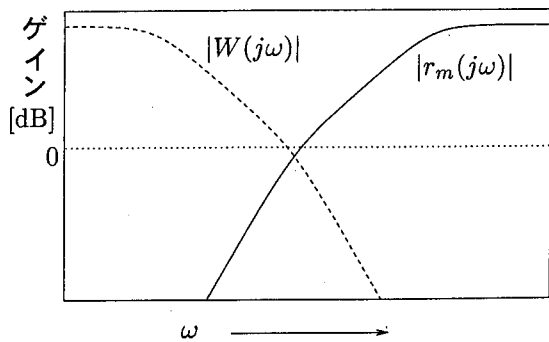


図 11: 混合感度問題における周波数重み伝達関数

が成り立つ。これはある周波数 ω_1 で $S(j\omega_1) \approx 0$ となれば $T(j\omega_1) \approx 1$ とならなければならないことを示している。つまり、 $S(s)$ と $T(s)$ を同じ周波数で同時に小さくすることはできないのである。2.2.1の周波数伝達関数の整形のところで述べたように(22)が満たされるならば

$$|S(j\omega)| < \frac{1}{|W(j\omega)|} \quad (26)$$

$$|T(j\omega)| < \frac{1}{|r_m(j\omega)|} \quad (27)$$

が満たされる。ある周波数 ω_1 で $W(j\omega_1) \gg 1$ であるならば、これらの式より $S(j\omega_1) \approx 0$ となる。このとき $T(j\omega_1) \approx 1$ でなければならないから $|r_m(j\omega_1)| \ll 1$ でなければならない。つまり、 $W(s)$ と $r_m(s)$ の周波数帯域は分かれている必要がある。

一般に(16)の乗法変動 $\Delta_m(j\omega)$ は高周波域で大きいことが多いので、(17)の $|r_m(j\omega)|$ は高周波域では大きい必要があるが、低周波域では小さく選ぶことができる場合が多い。また、目標値に対する追従特性は一般に低周波数の目標値信号に追従できれば十分な場合が多いので $|W(j\omega)|$ は低周波域では大きく、高周波域では小さく選べる場合が多い。つまり、一般に混合感度問題を設定する場合には周波数重み関数を図11のようにすることが多い。

このことは制御対象の不確かさの大きい周波数($|r_m(j\omega)|$ の大きい周波数)では追従特性を上げる($|S(j\omega)|$ を小さくする)ことができないことも意味している。

2.2.4 その他の問題

H_∞ 制御問題では伝達関数の H_∞ ノルムを小さくすることを考えるので感度関数、相補感度関数にこだわらずに閉

ループ系に關与した任意の伝達関数を考えることができる。図12は著者が好んで用いる H_∞ 制御問題である(点線の部分は必要に応じて用いる部分である)。 H_∞ 制御問題としては $(w_1, w_2, w_3, w_4)^T$ から $(z_1, z_2, z_3)^T$ の H_∞ ノルムを1未満にする問題であるが、伝達関数のそれぞれのブロックの意味は次のようになる。

$w_1 \rightarrow z_1$: 目標値 w_1 に対する出力 y の追従特性の評価。

$w_1 \rightarrow z_2$: 加法的誤差に対するロバスト安定化のための評価。

$w_1, w_2, w_3, w_4 \rightarrow z_2$: 目標値 w_1 や外乱 w_i が入っても出力が極端に大きくなるようにする評価。 $W_2(s)$ を用いて高周波の入力 u が $K(s)$ により生成されないように周波数整形する事もできる。

$w_2 \rightarrow z_1, z_2, z_3$: システムの入力に外乱が入ることは多い(例えば機械系のクーロン摩擦)。この評価は入力端外乱 w_2 が入った時の追従特性 z_1 などの悪化を防ぐ。

$w_3 \rightarrow z_1, z_2, z_3$: 特定の外乱が入ることがわかっている場合にはそれを評価に入れ、出力などへの影響を押さえる。

$w_1, w_2, w_3, w_4 \rightarrow z_3$: LQ制御において、出力 y のみの評価関数で過渡応答が良くない場合、状態 x の一部を評価関数に入れて応答を改善することがある。 z_3 も同様の目的で用いる。

$w_4 \rightarrow z_1, z_2, z_3$: コントローラの入力として出力 y と目標値 w の偏差以外にも利用できる観測出力がある場合には積極的にそれらの情報をコントローラに取り込んだ方がよい。ただし、観測出力には観測雑音 w_4 を考え、これが追従特性等に影響しないようにするための評価を加えることが必要。

H_2, H_3, H_4 : 外乱 w_1, w_2, w_3, w_4 をそれぞれどれだけ重要視するかを重み付け。

3 H_∞ 制御問題の解法

前章では H_∞ 制御の制御仕様としてどのようなものが用いられるかについて考えてきた。ここではこの制御仕様を満たすコントローラの求め方について考える。

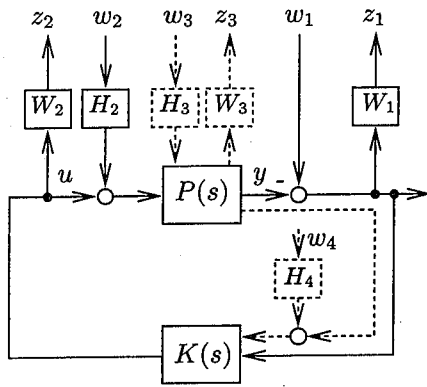


図 12: その他の問題

3.1 標準問題

前の章で挙げたすべての制御仕様に対して個別にコントローラ的设计法を考えるのは大変なので、これらすべての問題を一括して扱えるように標準問題を定義する。前の章でみたように H_∞ 制御の制御仕様はすべて閉ループ系のある入力 w からある出力 z までの伝達関数の H_∞ ノルムで定義されている。

そこで標準問題を図 13 と考える。ここで $G(s)$ は一般化制御対象と呼ばれるもので入力として外部入力 w と操作量 u をもち、出力として制御量 z と観測出力 y をもつ。状態空間表現は

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u \\ z &= C_1 x + D_{11} w + D_{12} u \\ y &= C_2 x + D_{21} w \end{aligned} \quad (28)$$

で与えられるとする。また、コントローラ $K(s)$ は観測出力 y から操作量 u までの伝達関数で表わされる。つまり

$$u = K(s)y \quad (29)$$

である。制御目的はシステムを安定化し、かつ、外部入力 w から制御量 z までの伝達関数 $G_{zw}(s)$ の H_∞ ノルムを 1 未満にすること、つまり

$$\|G_{zw}(s)\|_\infty < 1 \quad (30)$$

とすることである。

前の章で挙げた問題はすべて図 13 に帰着される。

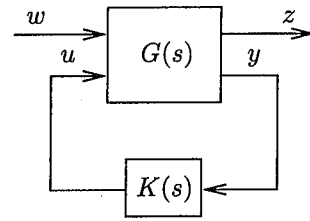


図 13: 標準問題

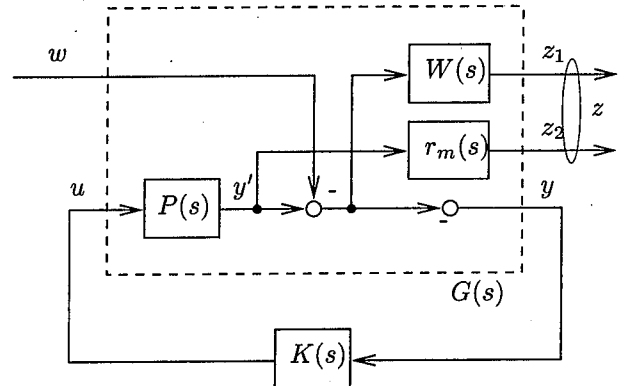


図 14: 混合感度問題の標準問題への変形

3.2 例題：混合感度問題の一般化制御対象

例えば (21) の混合感度問題は標準問題を用いて次のように解くことができる。図 10 のシステムは簡単なブロック線図の変換により図 14 のシステムと等価であることが分かる。つまり、(21) の問題は図 14 の w から z までの伝達関数 $G_{zw}(s)$ の H_∞ ノルムを 1 未満にするコントローラ $K(s)$ を求める問題となる。

このシステムの一般化制御対象の状態方程式は次のように求められる。制御対象の伝達関数 $P(s)$ の状態方程式表現を

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (31)$$

$$y' = Cx \quad (32)$$

とする（ここで一般化制御対象の観測出力と区別するために制御対象の出力を y' としている）。周波数重み伝達関数 $W(s)$ への入力が $(y' - w)$ であることを考慮して $W(s)$ の状態方程式表現を

$$\dot{x}_w = A_w x_w + B_w (y' - w) \quad (33)$$

$$z_1 = C_w x_w + D_w (y' - w) \quad (34)$$

$r_m(s)$ の状態方程式表現を

$$\dot{x}_r = A_r x_r + B_r y' \quad (35)$$

$$z_2 = C_r x_r + D_r y' \quad (36)$$

とする（伝達関数で表された周波数重み伝達関数を状態方程式で表す方法については付録参照）。一般化制御対象の観測出力 y が $y = -(y' - w)$ であることと $y' = Cx$ であることに注意しながらこれらを整理すれば、次の一般化制御対象の状態方程式が求められる。

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ x_w \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ B_w C & A_w & 0 \\ B_r C & 0 & A_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x_w \\ x_r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -B_w \\ 0 \end{pmatrix} w + \begin{pmatrix} B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_w C & C_w & 0 \\ D_r C & 0 & C_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x_w \\ x_r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -D_w \\ 0 \end{pmatrix} w + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} u \quad (37)$$

$$y = \begin{pmatrix} -C & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x_w \\ x_r \end{pmatrix} + Iw$$

この一般化制御対象を用いて標準問題を解けば混合感度問題を満たすコントローラ $K(s)$ を設計できる。

3.3 標準問題の解法

標準問題は 2 本のリカッチ方程式を用いて

- (30) を満たすコントローラが存在するか否かを確認する
- 存在するとき (30) をみたすコントローラを求める

方法が提案され、そのプログラムが市販のソフトウェア (MATRIX-x, MATLAB など) やフリーのソフトウェア (MaTX[10], <http://matx.mei.titech.ac.jp/>) として提供されている。 H_∞ 制御の実用化を考える場合には市販ソフトを使うことが最良の方法であると考えるので設計アルゴ

リズムの導出法についてはここでは述べないことにする。興味のある読者は文献 [1-7] を参照されたい。

ただし、これらのソフトウェアでは一般可制御対象が次の条件が満たされていると仮定してコントローラの設計が行われる。

$$(A, B_2) : \text{可安定} \quad (38)$$

$$(C_2, A) : \text{可検出} \quad (39)$$

$$D_{12} : \text{列フルランク} \quad (40)$$

$$D_{21} : \text{行フルランク} \quad (41)$$

$$\begin{pmatrix} A - j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{pmatrix} : \text{列フルランク, } \forall \omega \quad (42)$$

$$\begin{pmatrix} A - j\omega I & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{pmatrix} : \text{行フルランク, } \forall \omega \quad (43)$$

4 H_∞ 制御のノウハウ集

ここでは H_∞ 制御系を設計する場合のノウハウの一部を著者の経験に基づいて紹介しよう。

4.1 一般化制御対象が仮定を満たしていない場合の対処

考えている標準問題が条件 (40)-(43) を満足しない場合には一般化制御対象 (28) を

$$\dot{x} = Ax + (B_1 \delta_1 I \ 0) w' + B_2 u$$

$$z' = \begin{pmatrix} C_1 \\ \varepsilon_1 I \\ 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} D_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} w' + \begin{pmatrix} D_{12} \\ 0 \\ \varepsilon_2 I \end{pmatrix} u$$

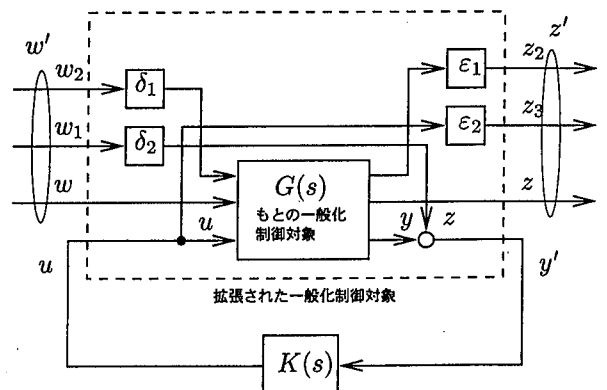


図 15: 標準問題の変更

$$y' = C_2 x + (D_{21} \ 0 \ \delta_2 I) w' \quad (44)$$

のように $\varepsilon_1 \geq 0, \varepsilon_2 \geq 0, \delta_1 \geq 0, \delta_2 \geq 0$ を用いて条件が満たされるように変更すれば市販のソフトウェアを用いることができる (ε, δ は仮定 (40)-(43) が満たされるように必要なもののみを用いればよく、すべてを用いる必要はない)。この一般化制御対象は (28) の外部入力 w と制御量 z をそれぞれ $w' = (w^T, w_2^T, w_3^T)^T, z' = (z^T, z_2^T, z_3^T)^T$ と拡張したものであり、余分な外部入力と余分な制御量を導入したシステムである (図 15)。

$u = K(s)y$ としたときの w' から z' までの伝達関数を $G_{z'w'}(s)$ とすると

$$G_{z'w'}(s) = \begin{pmatrix} G_{zw}(s) & \delta_1 G_{12}(s) & \delta_2 G_{13}(s) \\ \varepsilon_1 G_{21}(s) & \varepsilon_1 \delta_1 G_{22}(s) & \varepsilon_1 \delta_2 G_{23}(s) \\ \varepsilon_2 G_{31}(s) & \varepsilon_2 \delta_1 G_{32}(s) & \varepsilon_2 \delta_2 G_{33}(s) \end{pmatrix} \quad (45)$$

となる。ここで $G_{zw}(s)$ は元の一般化制御対象に $u = K(s)y$ なるフィードバックをほどこしたときの w から z までの伝達関数であり、 $G_{ij}(s)$ は $K(s)$ によって決まる伝達関数で $K(s)$ がシステムを安定にする限り安定である。これと H_∞ ノルムの性質 (7) より

$$\|G_{zw}(s)\|_\infty \leq \|G_{z'w'}(s)\|_\infty \quad (46)$$

が満たされる。また $\varepsilon_1 \rightarrow 0, \varepsilon_2 \rightarrow 0, \delta_1 \rightarrow 0, \delta_2 \rightarrow 0$ にしたがって

$$\|G_{z'w'}(s)\|_\infty \rightarrow \|G_{zw}(s)\|_\infty \quad (47)$$

となることが分かる。つまり (44) に対して

$$\|G_{z'w'}(s)\|_\infty < 1 \quad (48)$$

を満たすコントローラ $K(s)$ を設計することは

$$\|G_{zw}(s)\|_\infty < 1 \quad (49)$$

を満たすコントローラを設計することと同じことになる。しかし、 ε と δ を余り小さくし過ぎると閉ループ系の応答が悪化することがあるので、その場合はある程度大きな ε, δ を用いたほうがよい場合もある。

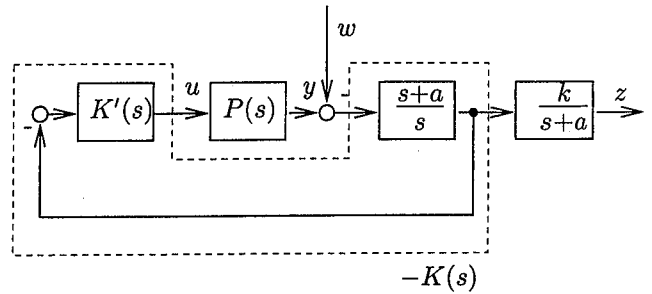


図 16: サーボ系の設計

4.2 サーボ系の設計

ステップ目標値に対して偏差なく追従する制御系 (サーボ系) を H_∞ 制御の枠組みで構成するためには次のような若干のトリックが必要となる。

まず、制御系がステップ目標値に対して偏差なく追従するということは図 2 で周波数 $\omega = 0$ における目標値 w から偏差 $z_1 = y - w$ までゲイン (感度関数 $S(s)$ の周波数 $\omega = 0$ でのゲイン) が 0 になる ($|S(0)| = 0$) という事である。図 3 で考えたように感度に関する周波数重みを $W(s)$ とし、周波数整形の疑念を用いれば

$$|S(j\omega)| < \frac{1}{|W(j\omega)|} \quad \forall \omega \quad (50)$$

であるから、 $|W(0)| \rightarrow \infty$ となる $W(s)$ を用いて周波数整形すればステップ目標値に対して定常偏差なく追従する制御系が設計できることになる。このような $W(s)$ としては $W(s) = k/s$ (k は定数) などがある。しかし、この重みはコントローラから見ると不可観測かつ不安定であるので、一般に標準問題の (C_2, A) 可検出の仮定が満たされないことが知られている。そのため、図 16 のようにブロック線図を書き直す方法がある。ここで a は正の実数であれば何でもよい。また、実際のコントローラは $K(s) = \frac{s+a}{s} K'(s)$ となり、積分器を持つ。

この場合の $w \rightarrow z_1$ の伝達関数は

$$\begin{aligned} & \frac{k}{s+a} \frac{\frac{s+a}{s}}{1 + \frac{s+a}{s} P(s) K'(s)} \\ &= \frac{k}{s} \frac{1}{1 + P(s) K(s)} = \frac{k}{s} S(s) \end{aligned} \quad (51)$$

となり、感度関数に k/s の周波数重みをかけたものと同じであることがわかる。

この方法は物理的な意味を考えるよりも、単に (51) の

伝達関数の形が望ましい形であるから使える方法と割り切った方がいいというのが著者の考えである。

ループ内に $(s+a)/s$ ではなく、もっと単純に $1/s$ を入れた方がいいと考える人は少なくないと思われる（現代制御論でサーボ系を作るように）。ところが、この場合は標準問題に書き表すと D_{21} が行フルランクにならず、そのままでは標準問題が解けないシステムとなってしまう。それに対して $(s+a)/s$ の場合には D_{21} へ行フルランクとなる。

4.3 乗法的誤差 V.S. 加法的誤差

ロバスト制御問題を考える場合に乗法的誤差と加法的誤差のどちらが取り扱いやすいかについて著者の意見を述べておこう。乗法的誤差は相補感度関数で評価できるため、感度との関係も明確であり、理論的には取り扱いやすい。しかし、以下の理由で著者は加法的誤差を好んで用いる。

- 混合感度問題（乗法的誤差）では D_{12} が列フルランクではなく、先に述べた標準問題の変更が必要となる。それに対して加法的誤差を用いると D_{12} が一般に列フルランクになるため扱いやすい。
- 加法的誤差は図 7 のようにプラントへの入力をそのまま評価するため、ロバスト制御のみでなく、 $r_a(s)$ を入力の大きさを制限するような評価と考えると制御系を設計できる。例えば $r_a(s)$ を用いて w から u までの周波数整形を行えば、高周波の入力を使わない制御系を設計することができる。このときの w は加法的誤差を評価するための仮想的な信号であると同時に、入力制限問題を考えるための外乱（観測雑音とも目標値信号とも考えることができる）でもある。
- 入出力数が異なるシステムの場合、誤差を乗法的誤差で表しづらい場合がある。

4.4 多入出力系のスケーリング

多入出力システムの場合には入力と出力の単位をどのように選ぶか（スケーリング）に注意を払う必要がある。感度問題に関しては各出力に周波数重み伝達関数を独立に設定できるので問題はないが、ロバスト安定化問題では多

入出力系の誤差（多入出力伝達関数）の大きさを一つの周波数重み $r(s)$ で見積もるため、入出力の単位によっては $r(s)$ を大きく見積もらなければならない場合がある。

例えば圧力と位置を制御するシステムで（何らかしらの意味で）圧力については $1[\text{Pa}]$ の誤差、位置に関して $1[\text{m}]$ の誤差があるシステムがあるとする。このとき圧力 $[\text{Pa}]$ と位置 $[\text{m}]$ を統合したシステムの誤差は 1 である。

ここで位置の単位を $[\text{cm}]$ にしたとすると位置の誤差は $100[\text{cm}]$ となる。このとき圧力 $[\text{Pa}]$ と位置 $[\text{cm}]$ を統合したシステムの誤差は 2 つの誤差の大きい方の 100 となる。この場合には圧力に関しても $100[\text{Pa}]$ の誤差を許容するコントローラを設計することになり、オーバースペックとなる。また、その分、応答性を犠牲にすることになる。

逆に言えば入出力のスケーリングをすることにより見かけ上のシステムの誤差を小さくし、応答特性を上げることのできる可能性があることになる。

4.5 マイナーフィードバックの効用

一般に評価関数を用いた最適制御の場合、評価するものが等しければマイナーフィードバックの有無に関わらず最終的なコントローラは一致する。しかし、 H_∞ 制御の場合はマイナーフィードバックが非常に効果ある場合がある。

まず第一はマイナーフィードバックによりシステムの不確かさが小さくなる場合である。厳密な議論は文献 [9] を参照されたいが、上手にマイナーフィードバックを設計すればシステムの応答の不確かさ（例えばプラントの特性の温度による変化など）が小さくなる場合がある。このマイナーフィードバックを施されたシステムを制御対象と考えれば元の制御対象より不確かさが減るためにロバスト制御が容易になり、その分、応答性をあげられる場合がある。

また、制御対象が原点極を持つ場合、標準問題の解法において (42) (43) が非常にテクニカルな問題を引き起こす場合がある。この場合、サーボ系の設計と同様に回避する方法 [2,11] もあるが、マイナーフィードバックにより制御対象が原点極を持たないように補償しておくことにより制御系設計を楽にする方法もある。

5 おわりに

H_∞ 制御はモデルの不確かさに対してロバストな制御系を容易に設計でき、また制御仕様が閉ループ系の周波数伝達関数のゲインとして与えられるため直感的であるなど利点が多い。また、市販ソフトウェアを用いることにより誰でも簡単に H_∞ 制御系を設計できるようになった。その意味で気が向いたらちょっと H_∞ 制御理論を使ってみてはいかがでしょう。

参考文献

- [1] 木村, 藤井, 森: ロバスト制御, コロナ社 (1994)
- [2] 美多: H_∞ 制御, 昭晃堂 (1994)
- [3] J.C.Doyle, B.A.Francis, A.R.Tannenbaum: Feedback Control Theory, Macmillan (1992)
- [4] K.Zhou, J.C.Doyle and Glover: Robust and Optimal Control, Prentice Hall (1996)
- [5] J.C.Doyle, K.Glover, P.P.Khargonekar and B.A.Francis: "State-Space Solutions to Standard H_2 and H_∞ Control Problems," Proc. 1988 American Control Conference, Atlanta (1988), IEEE Trans.on Automatic Control, 34-8, 831/847 (1989)
- [6] K.Glover and J.C.Doyle: State-Space Formulae for all Stabilizing Controllers that Satisfy an H_∞ - Norm Bound and Relations to Risk Sensitivity, Systems and Control Letters, vol.11, 167/172 (1988)
- [7] M.Sampegi, T.Mita and M.Nakamichi: An Algebraic Approach to H_∞ Output Feedback Control Problems, Systems and Control Letters, vol.14, no.1, 13/24 (1990)
- [8] 三平: 実用化のための H_∞ 制御理論入門, インターフェース, 1993年9月号
- [9] Kimura: Robust Control Design with Minor Feedback and Its Application to Pneumatic Control systems, 東京工業大学学位論文 (指導教官: 原辰次) 1995
- [10] 古賀: ロボット工学ソフトウェア利用の手引 (第3回) 科学技術計算プログラミング言語 matx, 日本ロボット学会誌, vol.14, no.6, 800/803 (1996)
- [11] 内田他: H_∞ 制御の実プラントへの応用, 計測自動制御学会 (1996)

A (付録) ロバスト安定の証明

なぜ (15) や (18) によりロバスト安定が達成できるのだろうか。ここでは乗法的誤差の場合 (18) について簡単に証明する。まず、閉ループ系の安定性を保証するナイキストの安定定理について簡単に述べる。図 17 のシステムを考えたとき、伝達関数 $H(s)$ のナイキスト軌跡とは複素数 $H(j\omega)$ を ω をパラメータとして複素平面上に書いたものである (図 18)。今、伝達関数 $H(s)$ の不安定な極の数を p とするとき、図 17 の閉ループ系が安定であるための条件は $H(j\omega)$ のナイキスト軌跡 ($\omega: -\infty \rightarrow \infty$) が複素平面上の点 $-1+j0$ を反時計回りに p 回まわることである。例えば図 18 のナイキスト軌跡は $-1+j0$ の点を回らないので、 $H(s)$ が不安定極を持たない場合 (安定な場合) に図 17 の閉ループ系が安定になる。これがナイキストの安定定理である。

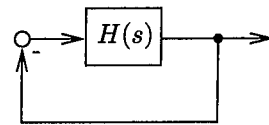


図 17: 閉ループ系

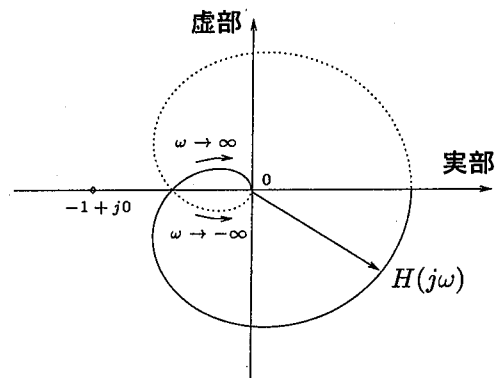
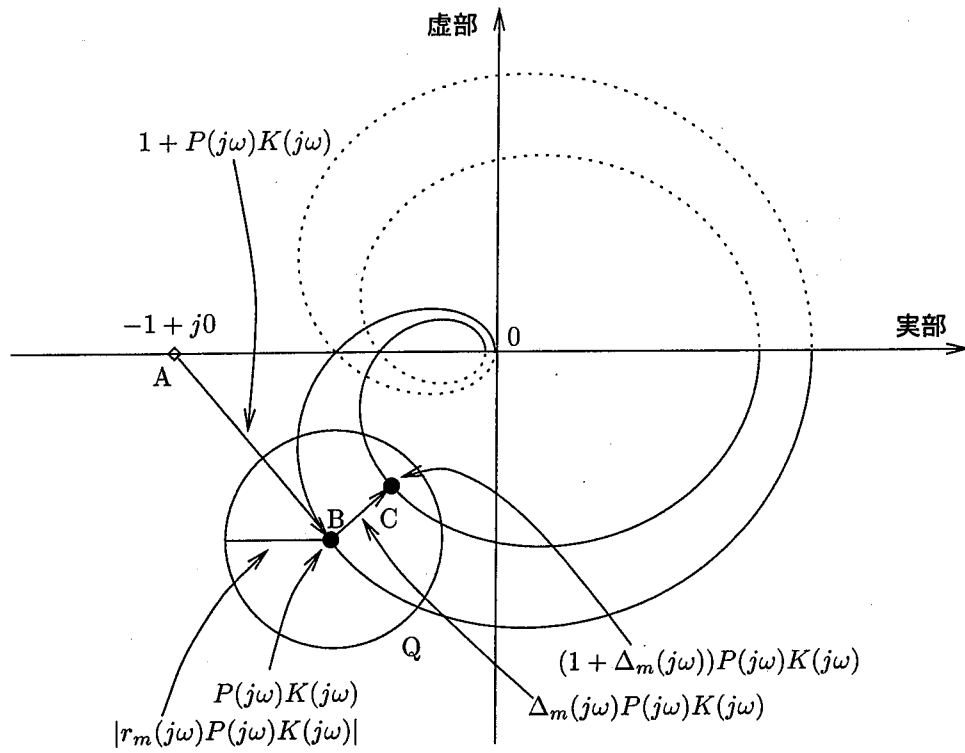


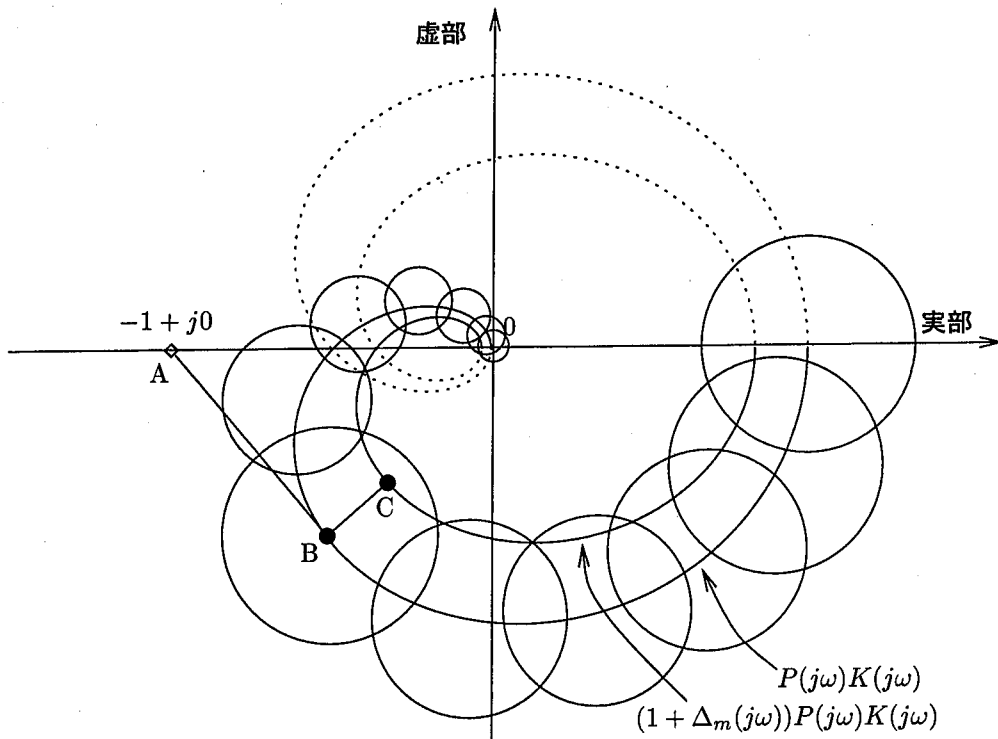
図 18: ナイキスト軌跡

さて、それでは図 8 の乗法的不確かさのあるシステムの安定性を考えよう。このシステムで先ほどの $H(s)$ に当たるものは $(1+\Delta_m(s))P(s)K(s)$ であること、 $P(s)$ と $(1+\Delta_m(s))P(s)$ の不安定極の数が同じであること、 $\Delta_m(s) \equiv 0$ のとき閉ループ系が安定であることに注意してナイキストの安定定理を用いれば、 $\Delta_m(s)$ に依らず閉ループ系が安定であるためには $P(s)K(s)$ のナイキスト軌跡と $(1+\Delta_m(s))P(s)K(s)$ のナイキスト軌跡の $-1+j0$ を回る数が等しければいいことになる。

図 19(a) は $P(s)K(s)$ と $(1+\Delta_m(s))P(s)K(s)$ のナイキスト軌跡を表している。ここで周波数を ω に固定して考



(a) $P(s)K(s)$ と $(1 + \Delta_m)P(s)K(s)$ のナイキスト軌跡



(b) $P(s)K(s)$ のナイキスト軌跡と円の関係

図 19: ロバスト安定とナイキスト軌跡

えてみる。図中で A 点は $-1+j0$, B 点は $P(s)K(s)$ のナイキスト軌跡で周波数 ω の点 (複素数 $P(j\omega)K(j\omega)$ を表す点), C 点を $(1+\Delta_m(s))P(s)K(s)$ のナイキスト軌跡で周波数 ω の点 (複素数 $(1+\Delta_m(j\omega))P(j\omega)K(j\omega)$ を表す点), 円 Q を中心が B で半径が $|r_m(j\omega)P(j\omega)K(j\omega)|$ の円とする。

ここでベクトル \vec{BC} は複素数 $\Delta_m(j\omega)P(j\omega)K(j\omega)$ を表わすことと, $|\Delta_m(j\omega)| < |r_m(j\omega)|$ であることより, 明らかに点 C は円 Q の内部に存在する。もしすべての周波数 ω でベクトル \vec{AB} の長さが円の半径 $|r_m(j\omega)P(j\omega)K(j\omega)|$ より長ければ, $P(s)K(s)$ のナイキスト軌跡と円の関係は図 19(b) のようになる。先の考察より, $(1+\Delta_m(j\omega))P(j\omega)K(j\omega)$ は円の中に存在するから, $P(s)K(s)$ と $(1+\Delta_m(s))P(s)K(s)$ のナイキスト軌跡の $-1+j0$ 点を回る回数は同じとなる。つまり, $\Delta_m(s)$ によらず閉ループ系が安定となる。ベクトル \vec{AB} の長さが

$$|1+P(j\omega)K(j\omega)| \quad (52)$$

であり, 円 Q の半径は $|r_m(j\omega)P(j\omega)K(j\omega)|$ であることに注意すれば, これは

$$|1+P(j\omega)K(j\omega)| > |r_m(j\omega)P(j\omega)K(j\omega)| \quad (53)$$

がすべての周波数 ω について成り立てば $\Delta_m(s)$ によらず閉ループ系が安定となることを示している。両辺を左辺で割れば, これはすべての周波数において

$$\left| \frac{r_m(j\omega)P(j\omega)K(j\omega)}{1+P(j\omega)K(j\omega)} \right| < 1 \quad (54)$$

となることを意味している。これを H_∞ ノルムで表わせば

$$\left\| \frac{r_m(s)P(s)K(s)}{1+P(s)K(s)} \right\|_\infty < 1 \quad (55)$$

となり, (18) が求められる。

B 伝達関数から状態方程式へ

一般に伝達関数

$$G(s) = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0} + d$$

の状態空間表現は以下のように書くことができる。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [b_0 \ b_1 \ \dots \ b_{n-1}] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + du$$

例題 1. $\frac{K}{Ts+1}$ の状態方程式

$$\frac{K}{Ts+1} = \frac{K/T}{s+1/T}$$

より

$$\frac{d}{dt}x = -\frac{1}{T}x + 1u$$

$$y = K/Tx + 0u$$

例題 2. $\frac{Ks^2}{(Ts+1)^2}$ の状態方程式

$$\frac{Ks^2}{(Ts+1)^2} = \frac{Ks^2}{T^2s^2 + 2Ts + 1} = \frac{(K/T^2)s^2}{s^2 + (2/T)s + (1/T^2)}$$

$$= \frac{-(2K/T^3)s - (K/T^4)}{s^2 + (2/T)s + (1/T^2)} + \frac{K}{T^2}$$

よって

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(1/T^2) & -(2/T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} -\frac{K}{T^4} & -\frac{2K}{T^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \frac{K}{T^2}u$$