非線形状態方程式と微分幾何学の初歩概念

三平満司（東京工業大学）

1　はじめに

伝達関数に基づいた古典制御，状態方程式に基づいた現代制御，近年の H_∞ 制御等々，線形システムに対するコントローラーの設計方法が昔から盛んに研究されている．しかし，実際のシステムは多かれ少なかれ非線形性を持つことが多いため，どうしても非線形システムを直接扱う方法が必要となる．このような非線形システムを扱う方法として，状態方程式に基づいた線形制御理論の拡張である「微分幾何学に基づいた非線形制御理論」が確立されている [1,2]．ここでは微分幾何学に基づいた非線形制御理論で扱う非線形状態方程式と，後に必要になる微分幾何学の概念についてまとめる．

2　線形システムと非線形システム

ここで扱う非線形システムは次の非線形状態方程式で表わされる１入力１出力 n 次のシステムである．

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + g(x)u \tag{1}$$

$$y = h(x) \tag{2}$$

ここで $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$ は状態で n 次元の縦ベクトル，u はシステムへの入力でスカラー，y はシステムの出力でスカラーである．また $f(x)$, $g(x)$ は x に関して何回でも偏微分可能（C^∞）な n 次元の縦ベクトル値関数（ベクトル場），$h(x)$ はスカラー関数であり，一般性を失うことなく $f(0) = 0$, $h(0) = 0$ と仮定する．

線形システムが状態方程式

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu \tag{3}$$

$$y = Cx \tag{4}$$

で表されることを考えれば $f(x)$ は Ax に，$g(x)$ は B に，$h(x)$ は Cx に当たることが容易にわかる．

さて，非線形状態方程式 (1)(2) ではバックラッシュや静摩擦，動摩擦，ヒステリシス等を表わすことはできないが，これらの非線形性を無視した機械系の運動方程式などを表わすことができる．

例として図１に示す簡単なリンク系を考える．ここでリンクの姿勢角を θ（システムの出力），リンクの角速度を

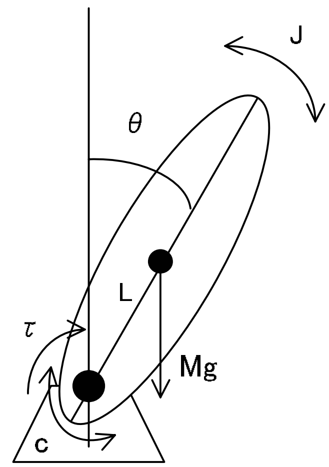

図 1: 1 リンク系

$\dot\theta = \frac{d\theta}{dt}$，リンクの質量を m，回転軸からリンクの重心までの距離を L，リンクの回転軸回りの慣性モーメントを J，回転軸の粘性摩擦係数を c，リンクにかかるトルクを τ（システムの入力），重力加速度を g とすればこのシステムの運動方程式は

$$J\ddot\theta = -c\dot\theta + mLg\sin\theta + \tau \tag{5}$$

で表わされる（ただし $\ddot\theta = \frac{d^2\theta}{dt^2}$）．これを変形して状態方程式

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\theta \\ \dot\theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\dot\theta \\ -\frac{c}{J}\dot\theta + \frac{mLg}{J}\sin\theta\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 \\ \frac{1}{J}\end{pmatrix}\tau \tag{6}$$

を得る．ここで状態 x_L と入力 u_L を

$$x_L = \begin{pmatrix}x_{L1} \\ x_{L2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\theta \\ \dot\theta\end{pmatrix}, \qquad u_L = \tau, \tag{7}$$

と定義し，さらに $f_L(x_L)$ と $g_L(x_L)$ を

$$\begin{aligned} f_L(x_L) &= \begin{pmatrix}f_{L1}(x_L) \\ f_{L2}(x_L)\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}x_{L2} \\ -\frac{c}{J}x_{L2} + \frac{mLg}{J}\sin x_{L1}\end{pmatrix} \end{aligned} \tag{8}$$

$$g_L(x_L) = \begin{pmatrix}g_{L1}(x_L) \\ g_{L2}(x_L)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 \\ \frac{1}{J}\end{pmatrix} \tag{9}$$

と定義すれば (6) は

$$\frac{dx_L}{dt} = f_L(x_L) + g_L(x_L)u_L \tag{10}$$

となり，(1) の形の非線形状態方程式で表わされていることがわかる．

3 微分幾何学の基礎知識

ここでは非線形制御理論を展開するに当たり必要となる微分幾何学の概念をまとめる．

以下の定義は微分幾何学の本の定義と多少異なることがあるが本質は同じである．

関数のベクトルによる偏微分

スカラー関数 $\phi(x)$ の x に関する偏微分を次のように行ベクトルの形で表わす．

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \phi}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

ベクトル値関数 $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x))^T$ が与えられたとき $f(x)$ の x に関する偏微分を次のように定義する．

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

滑らかな関数

関数は x に関する偏微分が何回でも可能であるとき滑らかな関数（C^∞ 級関数）であるという．ベクトル値関数に関しても同様である．

局所と近傍

$x = x_0$ の近傍 U とは x_0 を内点として含む R^n の部分集合のことである．つまり，x_0 に十分近い点を含む R^n の部分集合と考えればよい（または x_0 が U の境界上には無いと考えることができる）．x_0 の近傍 U は小さいときもあれば大きいこともある．例えば近傍 U は R^n 全体のこともあるし，x_0 のほんの近くだけのこともある．近傍という名前から U が常に狭い範囲でしかないと誤解されることが多いので注意が必要である．

また，"$\cdots$ を満たす $\phi(x)$ が局所的に存在する" とは任意の $x = x_0$ に対して x_0 を含む近傍 U が存在して $\phi(x)$ が U 上で存在するということである．この近傍 U も大きいこともあれば小さいこともある．

座標変換と微分同相写像

座標変換 P とは状態 x の座標系を変換するものである．

$$P:\ \mathrm{R}^n \ \rightarrow\ \mathrm{R}^n$$

新しい座標系を ξ で表わせば

$$\xi = P(x) \tag{11}$$

が座標変換を表わす．

線形システムの場合，座標変換は

$$\xi = Tx$$

で定義される．線形の場合，座標 x で表わされたシステムと ξ で表わされたシステムが等価であるためには座標の逆変換

$$x = T^{-1}\xi$$

が存在しなくてはならない．そのため T は正則に選ばれる．同様に非線形システムにおける座標変換 $\xi = P(x)$ も逆変換

$$x = P^{-1}(\xi)$$

が存在しなければならない．また，本解説では C^∞ 関数や C^∞ ベクトル場を扱うため，これらの C^∞ 性が保存されるような座標変換が必要となる．そこで，ここでは微分同相な座標変換のみを扱うものとする．関数 $P: \mathrm{R}^n \rightarrow \mathrm{R}^n$ が微分同相であるとは P が一対一かつ上への C^∞ 関数であり，かつ逆関数 P^{-1} も C^∞ 関数であることである．微分同相な座標変換 P と逆変換 P^{-1} により C^∞ 関数は C^∞ 関数に，C^∞ ベクトル場は C^∞ ベクトル場に変換されることが容易に示される．例えば x 座標系での C^∞ 関数 $\phi(x)$ は

$$\bar{\phi}(\xi) = \phi(P^{-1}(\xi)) \tag{12}$$

と ξ 座標系の C^∞ 関数 $\bar{\phi}(\xi)$ に変換される．

座標変換 P の x による偏微分は $\partial P/\partial x$ であるが，これを

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x} \tag{13}$$

と表わすことがある．これらは混用されることが多いので注意する．

P と P^{-1} が C^∞ 関数であることから，これらの合成関数

$$x = P^{-1}(P(x))$$

も C^∞ 関数である．よって，この式の両辺は x で偏微分できて

$$\frac{\partial x}{\partial x} = \frac{\partial P^{-1}}{\partial \xi}\frac{\partial P}{\partial x}$$

を満たす．明らかに $\partial x/\partial x = I$ であるから

$$\frac{\partial P^{-1}}{\partial \xi}\frac{\partial P}{\partial x} = I$$

でなければならない．つまり

$$\frac{\partial P^{-1}}{\partial \xi} = \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^{-1} \tag{14}$$

である．これを (13) を用いて表わせば

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^{-1} \tag{15}$$

となる．

逆関数定理

座標変換 P の偏微分の満たす式 (14) は $P(x)$ が微分同相であるならば $\partial P/\partial x$ がすべての x で正則であることも示している．この逆は一般に成り立たないが，関数の定義域と値域を制限することにより次の逆関数定理が成り立つことが知られている．

《逆関数定理》

A を R^n の開集合とし，$P: A \to \mathrm{R}^n$ を C^∞ 関数とする．いま $\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{x_0}$ がある点 $x_0 \in A$ において正則であるならば次の性質を持つ x_0 の開近傍（x_0 の近傍で開集合であるもの）V が存在する．

(1) 関数 P による V の像 $\bar{V} = P(V)$ が R^n の開集合である．

(2) 関数 P の定義域を V に制限した関数 $P: V \to \bar{V}$ が微分同相である． □

この逆関数定理は x_0 の近傍における関数 P の逆関数の存在性が実行列 $\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{x_0}$ の正則性で判断できることを示している．この定理は与えられた C^∞ 関数が座標変換であるか（逆変換が存在し，逆変換も C^∞ であるか）を判断するときに用いる．

ベクトル場と座標変換の微分

ベクトル場 $f(x)$ とは

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \tag{16}$$

のように状態 x に対して x の時間微分 $\dot{x}$ を対応させるベクトル値関数である．ベクトル場の各要素が C^∞ 関数であるとき C^∞ ベクトル場という．ベクトル場 $f(x)$ は状態の座標変換 $\xi = P(x)$ が与えられたとき，ξ 座標系で

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{d}{dt}P(x) = \frac{\partial P}{\partial x}\ \frac{dx}{dt} = \frac{\partial P}{\partial x}\ f(P^{-1}(\xi)) \tag{17}$$

となる．つまり，ベクトル場 $f(x)$ は座標変換によりベクトル場 $\frac{\partial P}{\partial x}\ f(P^{-1}(\xi))$ に変換されることになる．この座標変換 P によって決定されるベクトル場の座標変換を座標変換 $P(x)$ の微分と呼び，次のように P_* で表わす．

$$P_* f(x) = \frac{\partial P}{\partial x}\ f(P^{-1}(\xi)) \tag{18}$$

ベクトル場 $f(x)$ の座標変換を必要に応じて (13) を用いて次のように表わすことがある．

$$\begin{aligned} P_* f(x) &= \frac{\partial P}{\partial x}\ f(P^{-1}(\xi)) = \frac{\partial \xi}{\partial x}\ f(P^{-1}(\xi)) \\ &= \frac{\partial P}{\partial x}\ f(x) = \frac{\partial \xi}{\partial x}\ f(x) \end{aligned} \tag{19}$$

Lie 微分

スカラー関数 $\phi(x)$ のベクトル場 $f(x)$ による Lie 微分は

$$L_f \phi(x) = \frac{\partial \phi}{\partial x} f(x) \tag{20}$$

で定義されるスカラー関数である．

Lie 微分を繰り返すときには次の記号を使う．

$$L_f^0 \phi(x) = \phi(x), \quad L_f^{j+1}\phi(x) = L_f L_f^j \phi(x) \tag{21}$$

Lie 微分はある関数の時間微分を求めるときに用いられる．例えば状態 x の挙動がベクトル場 $f(x)$ によって

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

なる状態方程式で表されるとき，関数 $\phi(x)$ の時間微分は

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{dx}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial x} f(x) = L_f \phi(x)$$

と Lie 微分を用いて表わせる．同様に状態 x の挙動が

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + g(x)u$$

で与えられる場合には

$$\frac{d\phi}{dt} = L_{f+gu}\phi(x)$$

となる．

次に示す関係式は Lie 微分を含む式を簡略化するときによく用いられる．$f(x)$ と $g(x)$ をベクトル場，$\theta(x)$ と $\theta_i(x)$ をスカラー関数，$\alpha(x)$ と $\beta(x)$ をスカラー関数とするとき，

$$L_f\{\theta_1(x) + \theta_2(x)\} = L_f\theta_1(x) + L_f\theta_2(x) \tag{22}$$

$$L_{\alpha f + \beta g}\theta(x) = \alpha(x) L_f \theta(x) + \beta(x) L_g \theta(x) \tag{23}$$

$$L_f\{\theta_1(x)\cdot\theta_2(x)\} = \theta_1(x) L_f \theta_2(x) + \theta_2(x) L_f \theta_1(x) \tag{24}$$

が成り立つ．これらは Lie 微分の定義を用いて次のように証明できる．

$$
\begin{aligned}
L_f\{\theta_1(x)+\theta_2(x)\} &= \left\{\frac{\partial\theta_1}{\partial x}+\frac{\partial\theta_2}{\partial x}\right\}f(x) \\
&= \frac{\partial\theta_1}{\partial x}f(x)+\frac{\partial\theta_2}{\partial x}f(x) \\
&= L_f\theta_1(x)+L_f\theta_2(x) \\
L_{\alpha f+\beta g}\theta(x) &= \frac{\partial\theta}{\partial x}\{\alpha(x)f(x)+\beta(x)g(x)\} \\
&= \frac{\partial\theta}{\partial x}\alpha(x)f(x)+\frac{\partial\theta}{\partial x}\beta(x)g(x) \\
&= \alpha(x)L_f\theta(x)+\beta(x)L_g\theta(x) \\
L_f\{\theta_1\cdot\theta_2(x)\} &= \left\{\frac{\partial}{\partial x}\theta_1(x)\cdot\theta_2(x)\right\}f(x) \\
&= \left\{\frac{\partial\theta_1}{\partial x}\theta_2(x)+\theta_1(x)\frac{\partial\theta_2}{\partial x}\right\}f(x) \\
&= \theta_1(x)\frac{\partial\theta_2}{\partial x}f(x)+\theta_2(x)\frac{\partial\theta_1}{\partial x}f(x) \\
&= \theta_1(x)L_f\theta_2(x)+\theta_2(x)L_f\theta_1(x)
\end{aligned}
$$

Lie 微分は座標変換 $\xi = P(x)$ に対して不変である．座標変換によりスカラー関数 $\phi(x)$ は $\bar\phi(\xi)=\phi(P^{-1}(\xi))$ に，ベクトル場 $f(x)$ は $\bar f(\xi)=P_*f(x)=\frac{\partial P}{\partial x}f(P^{-1}(\xi))$ に変換される．便宜上，ξ 座標系での Lie 微分を

$$
\bar L_{\bar f}\bar\phi(\xi)=\frac{\partial\bar\phi}{\partial\xi}\bar f(\xi)
$$

と $\bar L_{\bar f}\bar\phi(\xi)$ で表わす．この表記法は一般的には用いられないが，ここではどの座標で Lie 微分を行なっているかを明確にするために用いる．一般的には ξ 座標系における Lie 微分も $L_{\bar f}\bar\phi(\xi)$ で表わし，L の上に $\bar{}$ はつけない．ξ 座標系における Lie 微分を計算すれば

$$
\begin{aligned}
\bar L_{\bar f}\bar\phi(\xi) &= \frac{\partial\bar\phi}{\partial\xi}\bar f(\xi) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial\xi}\phi(P^{-1}(\xi))\right)\bar f(\xi) \\
&= \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\ \frac{\partial P^{-1}}{\partial\xi}\right)\frac{\partial P}{\partial x}f(P^{-1}(\xi)) \\
&= \frac{\partial\phi}{\partial x}f(x) \\
&= L_f\phi(x) \qquad (25)
\end{aligned}
$$

となり，x において x 座標系で計算した Lie 微分の値と $\xi=P(x)$ において ξ 座標系で計算した Lie 微分の値が一致する．ここで 3 行目から 4 行目への変形には (14) より $\partial P^{-1}/\partial\xi=(\partial P/\partial x)^{-1}$ であることを用いた．このように Lie 微分は座標変換に対して不変である．

外微分と関数の独立性

C^∞ スカラー関数 $\phi(x)$ が与えられたとき，その外微分 $d\phi(x)$ は

$$
d\phi(x)=\frac{\partial\phi}{\partial x} \qquad (26)
$$

で定義される行ベクトル値関数である．m 個の関数 $\phi_i(x)$, $i=1,2,\cdots,m$ が与えられたとき，これらの外微分 $d\phi_i(x)$ が考えているすべての x において実ベクトルとして線形独立であるとき，m 個の関数 $\phi_i(x)$ は独立であるという．

外微分の定義より Lie 微分を

$$
L_f\phi(x)=d\phi(x)\cdot f(x) \qquad (27)
$$

と書き表すこともできる．

外微分は座標変換に対して次のような性質を満たす．座標変換 $\xi=P(x)$ により関数 $\phi(x)$ は $\bar\phi(\xi)=\phi(P^{-1}(\xi))$ に変換される．$\bar\phi(\xi)$ の ξ 座標での外微分を

$$
\bar d\bar\phi(\xi)=\frac{\partial\bar\phi}{\partial\xi}
$$

と $\bar d$ で表わす．この表記方法も一般には用いられないが，ここでは考えている座標系を明確にするために用いる．一般には ξ 座標系における外微分も d を用いて表わす．明らかに

$$
\begin{aligned}
\bar d\bar\phi(\xi) &= \frac{\partial}{\partial\xi}\bar\phi(\xi) = \frac{\partial}{\partial\xi}\phi(P^{-1}(\xi)) = \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial P^{-1}}{\partial\xi} \\
&= d\phi(x)\frac{\partial P^{-1}}{\partial\xi} = d\phi(x)\frac{\partial x}{\partial\xi} \qquad (28)
\end{aligned}
$$

が成り立つから，ξ 座標系における外微分は x 座標系における外微分に後ろから $\partial P^{-1}/\partial\xi=\partial x/\partial\xi$ を乗じたものと一致する．

Lie 微分と可識別性（可観測性）

次の入力のないシステムの出力から状態を推定する問題（可観測性）を考える．

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= f(x) \\
y &= h(x)
\end{aligned} \qquad (29)
$$

いま，出力の微分は利用できると仮定してスカラー関数 $\phi_i(x)$ を次のように定義する．

$$
\begin{aligned}
\phi_0(x) &= y = h(x) \\
\phi_1(x) &= \frac{dy}{dt} = L_fh(x) \\
&\ \ \vdots \\
\phi_i(x) &= \frac{d^iy}{dt^i} = L_f^ih(x) \\
&\ \ \vdots
\end{aligned} \qquad (30)
$$

この $\phi_i(x)$ の中で独立なものが n 個あると仮定し，これらをまとめて $q(x)=(q_1(x),\cdots,q_n(x))^T$ と定義すると，明らかに

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial x} \\ \frac{\partial q_2}{\partial x} \\ \vdots \\ \frac{\partial q_n}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dq_1 \\ dq_2 \\ \vdots \\ dq_n \end{pmatrix} \tag{31}$$

より，$\frac{\partial q}{\partial x}$ は正則である．このとき，逆関数定理より q と x の間に局所的な 1 対 1 対応が存在するから，q（出力 y の時間微分）を観測することにより状態 x を（局所的に）一意に決定することができる．これは可識別性と呼ばれ，線形システムの可観測性と同等のものと考えることができる．

$\phi_i(x)$ の中で独立なものが n 個存在しない場合には一般に状態を識別する事はできない．

入力のあるシステム (1)(2) の可識別性は $f(x)$ のみでなく，$g(x)$ を含めて Lie 微分した関数（例えば $L_fL_gL_fh(x)$ など）の独立性で判断することができる．

線形システムの可観測性と Lie 微分

線形システムの可観測性と Lie 微分の関係を考えるために，以下の入力のないシステムを考える．

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{32}$$

いま，出力の微分は

$$\begin{aligned} \phi_0(x) &= y = Cx \\ \phi_1(x) &= \frac{dy}{dt} = L_{Ax}Cx \\ &= \left\{\frac{\partial}{\partial x}Cx\right\}Ax \\ &= CAx \\ &\vdots \\ \phi_{n-1}(x) &= \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} = L_{Ax}^{n-1}Cx = CA^{n-1}x \end{aligned} \tag{33}$$

となる．$q=(\phi_0(x),\cdots,\phi_{n-1}(x))$ とすれば

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \begin{pmatrix} d\phi_0 \\ d\phi_1 \\ \vdots \\ d\phi_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} \tag{34}$$

となり，これが正則となることと線形システムの可観測性は一致する．

Lie bracket

2 つのベクトル場 $f(x)$, $g(x)$ の Lie bracket$[f,g](x)$ とは次式で定義される新しいベクトル場である．

$$[f,g](x) = \frac{\partial g}{\partial x}f(x) - \frac{\partial f}{\partial x}g(x) \tag{35}$$

明らかに $f(x)$, $g(x)$ が C^∞ ベクトル場であれば $[f,g](x)$ も C^∞ ベクトル場である．また定義より明らかに

$$[f,f](x) = 0 \tag{36}$$

$$[f,g](x) = -[g,f](x) \tag{37}$$

が成り立つ．

Lie bracket を繰り返し行なうことにより定義される次のベクトル場 $ad_f^i g$ を用いることがある．

$$ad_f^0 g(x) = g(x), \quad ad_f^{i+1}g(x) = [f, ad_f^i g](x) \tag{38}$$

Lie 微分と Lie Bracket

ベクトル場 $f(x)$, $g(x)$ の Lie bracket $[f,g](x)$ は任意のスカラー関数 $\phi(x)$ に対して

$$L_fL_g\phi(x) - L_gL_f\phi(x) = L_{[f,g]}\phi(x) \tag{39}$$

を満たす．この関係式は状態方程式の厳密な線形化で Lie 微分を繰り返す式を簡単化するときに用いる．

この関係は $f(x)$,$g(x)$ が 1 次元（スカラー関数）の場合には簡単に証明できる．Lie 微分の定義から

$$\begin{aligned} L_fL_g\phi(x) &= L_f\left\{\frac{\partial\phi}{\partial x}g(x)\right\} \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial\phi}{\partial x}g(x)\right\}f(x) \\ &= \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}g(x)\cdot f(x) + \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x}f(x) \end{aligned} \tag{40}$$

となる．同様に

$$L_gL_f\phi(x) = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}f(x)\cdot g(x) + \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}g(x) \tag{41}$$

となるから

$$\begin{aligned} L_fL_g\phi(x) - L_gL_f\phi(x) &= \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x}f(x) - \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}g(x) \\ &= \frac{\partial\phi}{\partial x}\left\{\frac{\partial g}{\partial x}f(x) - \frac{\partial f}{\partial x}g(x)\right\} \\ &= \frac{\partial\phi}{\partial x}[f,g](x) \\ &= L_{[f,g]}\phi(x) \end{aligned} \tag{42}$$

が証明される．f,g が 1 次元（スカラー関数）でない場合には f,g がベクトルであることと偏微分が行列になることに注意して，ベクトル・行列のそれぞれの要素について計算すれば同様に証明できる．

Lie bracket と座標変換

Lie bracket も座標変換 $\xi = P(x)$ に対して次の意味で

不変である．座標変換によりベクトル場 $f(x)$ は $\bar{f}(\xi) = P_* f(x)$ に，ベクトル場 $g(x)$ は $\bar{g}(\xi) = P_* g(x)$ に変換される．ξ 座標上での Lie bracket を便宜上

$$\overline{[\bar{f}, \bar{g}]}(\xi) = \frac{\partial \bar{g}}{\partial \xi}\bar{f}(\xi) - \frac{\partial \bar{f}}{\partial \xi}\bar{g}(\xi)$$

と $\overline{[\cdot,\cdot]}$ で表わす．この表記法も一般的には用いられないが，ここではどの座標で Lie bracket を計算しているかを明確にするために用いる．一般的には ξ 座標系における Lie bracket も $[\cdot,\cdot]$ で表わす．一方，任意のスカラー関数 $\phi(x)$ は座標変換により $\bar{\phi}(\xi) = \phi(P^{-1}(\xi))$ に変換される．Lie bracket の性質 (39) により x, ξ のそれぞれの座標系において

$$\begin{aligned} L_f L_g \phi(x) - L_g L_f \phi(x) &= L_{[f,g]}\phi(x) \\ \bar{L}_{\bar{f}}\bar{L}_{\bar{g}}\bar{\phi}(\xi) - \bar{L}_{\bar{g}}\bar{L}_{\bar{f}}\bar{\phi}(\xi) &= \bar{L}_{\overline{[\bar{f},\bar{g}]}}\bar{\phi}(\xi) \end{aligned}$$

が成り立つ．(25) に示したように Lie 微分は座標変換により不変であるから，２式の左辺は等しくなる．よって

$$L_{[f,g]}\phi(x) = \bar{L}_{\overline{[\bar{f},\bar{g}]}}\bar{\phi}(\xi)$$

が任意のベクトル場 $f(x)$, $g(x)$ と任意のスカラー関数 $\phi(x)$ について成り立つ．一方，Lie 微分が座標変換に対して不変であることから，これは $[f,g](x)$ を座標変換したものが $\overline{[\bar{f},\bar{g}]}(\xi)$ になる，つまり

$$\overline{[\bar{f}, \bar{g}]}(\xi) = P_*[f,g](x) \tag{43}$$

であることを示している．ここで $\bar{f}(\xi) = P_* f(x)$, $\bar{g}(\xi) = P_* g(x)$ であることから

$$\overline{[P_* f, P_* g]}(\xi) = P_*[f,g](x) \tag{44}$$

と表わすこともできる．つまり Lie bracket と座標変換が可換（$f(x)$ と $g(x)$ の Lie bracket を座標変換したものと，$f(x)$ と $g(x)$ を座標変換したものの Lie bracket が等しい）ことを示している．この意味で Lie bracket は座標変換に対して不変である．

インボリューティブとフロベニウスの定理

$D(x) = \{f_1(x), f_2(x), \cdots, f_r(x)\}$ を C^∞ ベクトル場の集合とする．いま任意の点 $x = a$ とベクトル場 $f_i(x), f_j(x) \in D(x)$ に対して $[f_i, f_j](a)$ が $D(a)$ の要素の線形結合で表わされるとき，つまり，

$$[f_i, f_j](a) \in \mathrm{span}\{f_1(a), f_2(a), \cdots, f_r(a)\} \tag{45}$$

であるときベクトル場の集合 $D(x)$ はインボリューティブであるという．ただし，$f(a)$ はベクトル場 $f(x)$ を $x = a$ で評価した値であるので，単なる実ベクトルと考える．また span は実ベクトルの線形結合からなる実ベクトルの集合を表わす．

この条件は $D(x)$ のベクトル場が任意の点において（実ベクトルの意味で）線形独立である場合には

$$[f_i, f_j](x) = \sum_{k=1}^{r} \delta_k^{i,j}(x) f_k(x) \tag{46}$$

を満たす C^∞ スカラー関数 $\delta_k^{i,j}(x)$ が存在することと同値となる．

インボリューティブの概念は分布 (distribution) に対して定義されることも多いが，ここの定義と本質的には同じである．この概念は次のフロベニウスの定理とともに用いられることが多い．

《フロベニウスの定理》

$D(x) = \{f_1(x), f_2(x), \cdots, f_r(x)\}$ のベクトル場が x_0 の近傍 U において線形独立であるとする．このとき x_0 の近傍 V と V 上で

$$L_{f_i}\phi_j(x) = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, r \tag{47}$$

を満たす $n-r$ 個の独立な関数 $\phi_j(x)$, $j = 1, 2, \cdots, n-r$ が存在するための必要十分条件は $D(x)$ がインボリューティブである x_0 の近傍 U' が存在することである． □

この定理はシステムを厳密に線形化する座標変換の存在性をチェックするときに用いる．

補足としてベクトル場の集合がインボリューティブでない場合に (47) を満たす関数が存在しない例を示しておく．次の２つのベクトルからなる集合を考える．

$$\begin{aligned} f_1(x) &= Ax = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix} \\ f_2(x) &= b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ここで $x_2 \neq 0$ かつ $x_3 \neq 0$ である状態の部分集合 U について考える．U 上ではベクトル場 $f_1(x) = Ax$ と $f_2(x) = b$ は線形独立である．しかし

$$[Ax, b] = -Ab = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より $[Ax, b]$ は $\{Ax, b\}$ と独立であるからインボリューティブではない．U 上で

$$L_{Ax}\phi(x) = 0, \qquad L_b\phi(x) = 0$$

を満たす関数 $\phi(x)$ が存在したと仮定する．このとき，Lie 微分の性質 (23) を用いれば任意のスカラー u に対して

$$L_{Ax+bu}\phi(x) = L_{Ax}\phi(x) + \{L_b\phi(x)\}u = 0$$

となる．これは

$$\frac{dx}{dt} = Ax + bu$$

としたとき，すべての u に対して

$$\frac{d}{dt}\phi(x) = L_{Ax+bu}\phi(x) \equiv 0$$

つまり，

$$\phi(x(t)) \equiv \phi(x(0))$$

であることを示す．しかし，(A, b) は可制御対であるからこのような関数は $\phi(x) \equiv$ (定数) 以外に存在しない．このとき $d\phi(x) = 0$ であるからこの $\phi(x)$ は独立な関数とはいえない．このようにインボリューティブでない場合には定理に示したような $\phi(x)$ は存在しない．

Lie bracket とシステムの可制御性

Lie bracket とシステムの可制御性を知るために以下のシステムを考える．

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x)u_1 + f_2(x)u_2 \tag{48}$$

いま状態が $x = x_0$ であると仮定する．このとき $u_1 = 1$, $u_2 = 0$ とすれば状態の時間微分は $\dot{x} = f_1(x_0)$ となり，状態は $f_1(x_0)$ の方向に移動できる．同様に $u_1 = 0$, $u_2 = 1$ とすれば状態は $f_2(x_0)$ 方向に移動できる．さらに以下の入力を考えると，状態はこれらの方向以外にも移動できる．

初期値 $x(0) = x_0$ のときに次の入力を考える．以下で t_1 と t_2 は十分小さい定数と仮定する．

$$\begin{array}{lll} u_1(t) = 1 & u_2(t) = 0 & (0 \le t < t_1) \\ u_1(t) = 0 & u_2(t) = 1 & (t_1 \le t < t_1 + t_2) \\ u_1(t) = -1 & u_2(t) = 0 & (t_1 + t_2 \le t < 2t_1 + t_2) \\ u_1(t) = 0 & u_2(t) = -1 & (2t_1 + t_2 \le t < 2t_1 + 2t_2) \end{array} \tag{49}$$

このとき，システムの状態はそれぞれ

$$\begin{array}{ll} \frac{dx}{dt} = f_1(x) & (0 \le t < t_1) \\ \frac{dx}{dt} = f_2(x) & (t_1 \le t < t_1 + t_2) \\ \frac{dx}{dt} = -f_1(x) & (t_1 + t_2 \le t < t_1 + t_2 + t_1) \\ \frac{dx}{dt} = -f_2(x) & (t_1 + t_2 + t_1 \le t < t_1 + t_2 + t_1 + t_2) \end{array} \tag{50}$$

なる状態方程式に従って遷移する．

さて，一般にシステムの状態方程式が

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \tag{51}$$

で与えられるとき

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{d}{dt}\frac{dx}{dt}x = \frac{d}{dt}f(x) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}f(x) \end{aligned} \tag{52}$$

であることから，時間応答の時間 t に関する 2 次近似は

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) + \left.\frac{dx}{dt}\right|_{x(0)} t + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2x}{dt^2}\right|_{x(0)} t^2 + O^3(t) \\ &= x(0) + f(x(0))t + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x(0)} f(x(0))t^2 \\ &\quad + O^3(t) \end{aligned} \tag{53}$$

と与えられる．同様にシステムの状態方程式が

$$\frac{dx}{dt} = -f(x) \tag{54}$$

で与えられるとき

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{d}{dt}\frac{dx}{dt} = -\frac{d}{dt}f(x) \\ &= -\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}f(x) \end{aligned} \tag{55}$$

であることから，時間応答の時間 t に関する 2 次近似は

$$x(t) = x(0) - f(x(0))t + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x(0)} f(x(0))t^2 + O^3(t) \tag{56}$$

となる．これらを用いて (50) の初期値 $x(0) = x_0$ に対する応答の t_1 と t_2 に対する 2 次近似を求める．明らかに $x(t_1)$ は

$$x(t_1) = x_0 + f_1(x_0)t_1 + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial f_1}{\partial x}\right|_{x_0} f_1(x_0)t_1^2 + O^3(t_1) \tag{57}$$

となる．この 2 次以下の項を

$$x_1^* := x_0 + f_1(x_0)t_1 + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial f_1}{\partial x}\right|_{x_0} f_1(x_0)t_1^2 \tag{58}$$

と表しておくと，$x(t_1 + t_2)$ は

$$\begin{aligned} &x(t_1 + t_2) \\ &\quad = x(t_1) + f_2(x(t_1))t_2 \\ &\qquad + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial f_2}{\partial x}\right|_{x(t_1)} f(x(t_1))t_2^2 + O^3(t_1, t_2) \\ &\quad = x_0 + f_1(x_0)t_1 + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial f_1}{\partial x}\right|_{x_0} f_1(x_0)t_1^2 \\ &\qquad + f_2(x_0 + f_1(x_0)t_1 + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial f_1}{\partial x}\right|_{x_0} f_1(x_0)t_1^2)t_2 \\ &\qquad + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial f_2}{\partial x}\right|_{x_1^*} f_2(x_1^*)t_2^2 + O^3(t_1) \\ &\quad = x_0 + f_1(x_0)t_1 + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial f_1}{\partial x}\right|_{x_0} f_1(x_0)t_1^2 + f_2(x_0)t_2 \\ &\qquad + \left.\frac{\partial f_2}{\partial x}\right|_{x_0} f_1(x_0)t_1t_2 + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial f_2}{\partial x}\right|_{x_0} f(x_0)t_2^2 \\ &\qquad + O^3(t_1) \end{aligned} \tag{59}$$

となる．この計算を繰り返していくと最終的に以下を得る．

$$\begin{aligned} &x(t_1 + t_2 + t_1 + t_2) \\ &\quad = x_0 + \left(\left.\frac{\partial f_2}{\partial x}\right|_{x_0} f_1(x_0) - \left.\frac{\partial f_1}{\partial x}\right|_{x_0} f_2(x_0)\right)t_1t_2 \\ &\qquad + O^3(t_1, t_2) \end{aligned} \tag{60}$$

これは，初期値が $x(0) = x_0$ のとき，状態が

$$\left.\frac{\partial f_2}{\partial x}\right|_{x_0} f_1(x_0) - \left.\frac{\partial f_1}{\partial x}\right|_{x_0} f_2(x_0) = [f_1, f_2](x_0) \tag{61}$$

の方向にも移動できることを示している．つまり，状態は $[f_1, f_2](x_0)$ 方向にも移動できる．これを繰り返せば状態は初期値 $x(0) = x_0$ から $f_1(x_0)$，$f_2(x_0)$，$[f_1, f_2](x_0)$，$[f_1, [f_1, f_2](x_0), \cdots$ 方向に移動できることになる．もし，これらが n 本の線形独立なベクトルで表されるならば，状態は任意の方向に移動できる，つまり，ある意味で可制御と考えることができる．ある意味でと書いたのはこの可制御性が線形システムで言う可制御性と完全には対応していないからであるが，ここでは詳細は省略する．

<u>線形システムの可制御性と Lie bracket</u>

次の線形システムについて考えよう．

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu \tag{62}$$

先に示したように Lie bracket とシステムの可制御性には関係があるが，これを線形システムに応用すると次のようになる．

$$\begin{aligned}
ad_{Ax}B &= [Ax, B] \\
&= \left\{\frac{\partial}{\partial x}B\right\}Ax - \left\{\frac{\partial}{\partial x}Ax\right\}B \\
&= 0 \cdot Ax - AB \\
&= -AB \qquad (63) \\
ad_{Ax}^2 B &= [Ax, -AB] \\
&= A^2 B \\
&\vdots \\
ad_{Ax}^k B &= (-1)^k A^k B
\end{aligned}$$

このように Lie bracket は線形システムにおいて可制御性を判定するための $B, AB, \cdots$ の計算をする事に対応することがわかる．

4 おわりに

ここでは非線形制御理論を展開するに必要な微分幾何学の概念についてまとめた．

参考文献

[1] 石島, 石動, 三平, 島, 山下, 渡辺: 非線形システム論, 計測自動制御学会 (1993)

[2] A.Isidori: Nonlinear Control Systems, Springer-Verlag (1st ed. 1985, 2nd ed. 1989)