

非線形 H_∞ 制御理論の限界と可能性

—セミアクティブサスペンションへの応用—

三平満司 (東京工業大学)

大作 覚・上村 一整 (トヨタ自動車)

1 はじめに

線形 H_∞ 制御 [1, 2] は MATLAB, MaTX 等の制御系設計のためのソフトウェア [3, 4, 5] を用いることによって制御器を簡単に設計することができるため, 様々な実システムに対して応用されている [6]. 一方, 線形 H_∞ 制御理論を非線形システムに拡張した非線形 H_∞ 制御理論 [7, 8] は, 理論的には成熟しているものの実応用例が少ない.

本解説では非線形 H_∞ 制御の実用化を目指して理論 (状態フィードバック) を概説するとともに, その実用上の限界と可能性について解説する. また, 一つの応用例として自動車のセミアクティブサスペンション制御 [23] を示し, 非線形 H_∞ 制御の実用化可能性を示す.

ここでは原点の安定性として指数安定性 (原点での線形近似の安定性とほぼ同じ) を考えて議論を進める. 非線形 H_∞ 制御では指数安定より弱い漸近安定性も扱えるが, 取り扱いが若干複雑になることから, ここでは扱わない.

2 非線形 H_∞ 制御理論概説

非線形 H_∞ 制御理論の詳細に関しては井村氏の解説 [7] や van der Shaft の本 [8] にゆずり, ここでは理論の実用化可能性を探るに必要な結果のみを示すことにする.

以下において記号は慣例に従い, x は状態, w は外部入力, u は制御入力, z は評価出力を表す n, m_1, m_2, p 次縦ベクトルとする. また, A, B, C, D 等は適当な次元の定数行列, $f(x), g(x), h(x), j(x)$ は適当な次元の縦ベクトル値 / 行列値関数とする.

2.1 H_∞ ノルムと L_2 ゲイン

伝達関数 $G(s)$ で表される安定な線形システム

$$z = G(s)w \quad (1)$$

の H_∞ ノルム (簡単のため 1 入出力系について記述) は周波数応答のゲインの最大値として

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_w |G(j\omega)| \quad (2)$$

と定義される (直感的に理解するためには \sup を \max とおきかえてもよい). このように伝達関数の H_∞ ノルムは周波数応答で表されるため, 線形 H_∞ 制御理論では周波数応答 (感度関数, 相補感度関数など) に基づいた制御系設計が可能となり, 多くの実応用例が報告されるようになった [6].

一方 (外乱) 入力 w と (評価) 出力 z の大きさを表すノルムとしてつぎの L_2 ノルムを考えた場合

$$\|z\|_2 = \sqrt{\int_0^\infty |z(t)|^2 dt} \quad (3)$$

$$\|w\|_2 = \sqrt{\int_0^\infty |w(t)|^2 dt} \quad (4)$$

$G(s)$ の H_∞ ノルムは

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_w \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2} \quad (5)$$

であることが知られている. これは H_∞ ノルムが (外乱) 入力 w によって生成される (評価) 出力 z の大きさの最大値 (ゲイン) を表していることを示している. このときの信号の大きさを測る尺度が L_2 ノルムであることから, 伝達関数 $G(s)$ の H_∞ ノルムをシステムの L_2 ゲインと呼ぶことがある.

非線形システムには周波数応答の概念がないため, 非線形 H_∞ 制御理論では H_∞ ノルムの概念としてこの L_2 ゲインを用いることになる. つまり, 非線形システム S_o に対して L_2 ゲインを

$$\|S_o\|_{L_2} = \sup_w \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2} \quad (6)$$

と定義し, 非線形 H_∞ 制御理論ではこのゲインを γ 以下にすることを目的とする.

2.2 H_∞ 状態フィードバック制御問題

線形システム S_l

$$S_l \begin{cases} \dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u \\ z &= C_1 x + D_{12} u \end{cases} \quad (7)$$

に対する線形 H_∞ 状態フィードバック制御問題とは「与えられた正定数 γ に対して、閉ループシステムを内部安定にし、かつ w から z までの H_∞ ノルム (L_2 ゲイン) が γ 未満となる制御器 u を設計せよ」という問題である。定理を簡単にするために以下の直交条件

$$C_1^T D_{12} = 0, \quad D_{12}^T D_{12} = I$$

を仮定すれば、この問題が可解であるための必要十分条件はつぎの定理で与えられる。

【定理】

線形 H_∞ 状態フィードバック制御問題が可解であるための必要十分条件はつぎのリカッチ不等式

$$PA + A^T P + \frac{1}{\gamma^2} PB_1 B_1^T P - PB_2 B_2^T P + C_1^T C_1 < 0 \quad (8)$$

を満たす正定対称行列 P が存在することである。このとき制御器の一つは

$$u = -B_2^T P x \quad (9)$$

で与えられる。

これと同様に非線形システム S

$$S \begin{cases} \dot{x} = f(x) + g_1(x)w + g_2(x)u \\ z = h_1(x) + j_{12}(x)u \end{cases} \quad (10)$$

に対する非線形 H_∞ 状態フィードバック制御問題とは「与えられた正定数 γ に対して、閉ループシステムを内部(指数)安定にし、かつ w から z までの L_2 ゲインが γ 未満となる制御器 u を設計せよ」という問題である。定理を簡単にするために以下の直交条件

$$h_1^T j_{12} = 0, \quad j_{12}^T j_{12} = I$$

を仮定すれば、この問題が可解であるための必要十分条件はつぎの定理で与えられる。

【定理】

非線形 H_∞ 状態フィードバック制御問題が可解であるための必要十分条件はつぎのハミルトンヤコビ偏微分不等式

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x^T} f + \frac{1}{4\gamma^2} \frac{\partial V}{\partial x^T} g_1 g_1^T \frac{\partial V}{\partial x} \\ - \frac{1}{4} \frac{\partial V}{\partial x^T} g_2 g_2^T \frac{\partial V}{\partial x} + h_1^T h_1 + \varepsilon x^T x \leq 0 \end{aligned} \quad (11)$$

を満たす正定関数 $V(x)$ および正定数 ε が存在することである。このとき制御器の一つは

$$u = -\frac{1}{2} g_2^T(x) \frac{\partial V}{\partial x}(x) \quad (12)$$

で与えられる。

ここで

$$\frac{\partial V}{\partial x^T} = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1} \quad \frac{\partial V}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial V}{\partial x_n} \right) \quad (13)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \left(\frac{\partial V}{\partial x^T} \right)^T \quad (14)$$

である。実際にはここで設計される状態フィードバックはハミルトンヤコビ偏微分不等式が満たされる範囲の状態 x で有効になる(準大域性)。また、直交条件が成り立たない場合にも同様にハミルトンヤコビ不等式を用いて状態フィードバックを設計できる。

さて、縦ベクトル値/行列値関数 $f(x)$ 等を

$$\begin{aligned} f(x) &= Ax + O^2(x) \\ g_1(x) &= B_1 + O^1(x), \quad g_2(x) = B_2 + O^1(x) \\ h_1(x) &= C_1 x + O^2(x), \quad j_{12}(x) = D_{12} + O^1(x) \end{aligned} \quad (15)$$

と近似すると非線形システム S は

$$S_{la} \begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u + O^2(x, u) \\ z = C_1 x + D_{12} u + O^2(x, u) \end{cases} \quad (16)$$

と線形近似できる ($O^\rho(x, u)$ は x, u に関して ρ 次以上の項を表す)。正定関数 $V(x)$ も

$$V(x) = x^T P x + O^3(x), \quad P > 0 \quad (17)$$

と2次近似して、ハミルトンヤコビ偏微分不等式に代入してみよう。簡単な計算より

$$\frac{\partial V}{\partial x^T} f + \frac{1}{4\gamma^2} \frac{\partial V}{\partial x^T} g_1 g_1^T \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{1}{4} \frac{\partial V}{\partial x^T} g_2 g_2^T \frac{\partial V}{\partial x} + h_1^T h_1 + \varepsilon x^T x = 2x^T P A x + O^2(x), \quad \frac{\partial V}{\partial x} = 2P x + O^2(x) \quad (18)$$

であること、また、 $x^T P A x$ がスカラーであることから

$$2x^T P A x = x^T (P A + A^T P) x \quad (19)$$

であることがわかる。これらを用いてハミルトンヤコビ偏微分不等式を整理すれば

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x^T} f + \frac{1}{4\gamma^2} \frac{\partial V}{\partial x^T} g_1 g_1^T \frac{\partial V}{\partial x} \\ - \frac{1}{4} \frac{\partial V}{\partial x^T} g_2 g_2^T \frac{\partial V}{\partial x} + h_1^T h_1 + \varepsilon x^T x \\ = 2x^T P A x + \frac{1}{\gamma^2} x^T P B_1 B_1^T P x \\ - x^T P B_2 B_2^T P x + x^T C_1^T C_1 x + \varepsilon x^T x + O^3(x) \\ = x^T (P A + A^T P + \frac{1}{\gamma^2} P B_1 B_1^T P \\ - P B_2 B_2^T P + C_1^T C_1 + \varepsilon I) x + O^3(x) \\ \leq 0 \end{aligned} \quad (20)$$

となる。ここで $O^3(x)$ を無視できる原点近傍で考える。 x は原点近傍で任意の値をとることからこの条件は

$$PA + A^T P + \frac{1}{\gamma^2} PB_1 B_1^T P - PB_2 B_2^T P + C_1^T C_1 + \varepsilon I \leq 0 \quad (21)$$

または、 ε が正定数であることから

$$PA + A^T P + \frac{1}{\gamma^2} P B_1 B_1^T P - P B_2 B_2^T P + C_1^T C_1 < 0 \quad (22)$$

と一致する．これは線形近似システムのリカッチ不等式と同一のものである．さらに、状態フィードバックの線形近似は

$$u = -\frac{1}{2} g_2^T(x) \frac{\partial V}{\partial x}(x) = -B_2^T P x + O^2(x) \quad (23)$$

となり、これも線形近似システムに対して線形 H_∞ 制御理論を用いて制御系を設計したものと一致する．

これよりつぎの2つの重要な事実が分かる．

- 非線形 H_∞ 制御は線形 H_∞ 制御の自然な拡張としてえられる．
- 非線形システムに非線形 H_∞ 制御理論を用いて設計した状態フィードバックの線形近似は、非線形システムを線形近似した後に線形 H_∞ 制御理論で設計したものと一致する．

3 非線形 H_∞ 制御の限界と可能性

前節で述べたように非線形 H_∞ 制御理論は線形 H_∞ 制御理論の自然な拡張として理論的にはほぼ解けているといっても過言ではない（出力フィードバック問題も既に解かれている）．この非線形 H_∞ 制御理論を実システムに応用するためには非線形 H_∞ 制御の特徴（限界と可能性）を十分理解する必要があるだろう．著者の考える理論の限界と可能性（得意とする分野）を以下に列挙し、実応用への注意点をまとめる．

[理論の限界]

- (1) 出力フィードバックの場合は本質的に原点近傍のみで有効な制御器しか設計できない．
- (2) 原点近傍では非線形 H_∞ 制御と線形 H_∞ 制御は同じ．

このうち(1)は一般論を展開する限り逃げられない問題である．非線形システムの場合には分離定理が成立しないため、安定な観測器と制御器を独立に設計することができない．そのため、全体としての安定性は原点近傍のみしか保証できないのが現状である（詳しくは井村氏の解説[7]を参照されたい）．しかし、著者らの研究[10]のように観測器の収束性が保証されるように制御系設計を工夫（対象システム・評価関数）することにより、大域的に安定化する出力フィードバックが設計できる制御問題もある．

また、前節で示したように原点近傍では「非線形 H_∞ 制御の線形近似」と「線形近似したシステムに対する線形 H_∞ 制御」が一致するので、非線形性が弱いシステムの場合では線形 H_∞ 制御で十分（非線形 H_∞ 制御は不要）である．しかし、後で述べるように原点近傍外でのシステム応答の改善の可能性が残っていることに注意する．

[非線形 H_∞ 制御理論の得意とする問題]

- (3) (準)大域的安定性の保証．
- (4) ロバスト安定性．
- (5) 原点近傍外での応答の向上．

ハミルトンヤコビ偏微分不等式の解を求めることはリアプノフ関数を直接求めることと対応するので、システムの(準)大域安定性が確保され（特に状態フィードバックの場合）、非線形システムの安定化領域を広げられる．

また、非線形 H_∞ 制御では非線形システムに対してゲインを定義しているのでスモールゲイン定理を用いればロバスト安定化が理論的には可能である．しかし、誤差の表記方法、評価方法はまだ確立されていないので、適用には工夫が必要である．

著者らは(5)の原点近傍外での応答の改善が非線形 H_∞ 制御の実応用に関する一番のメリットと考えている．先に述べたように非線形 H_∞ 制御を行った場合、原点近傍では線形 H_∞ 制御よりも性能を向上させることはできない．しかし、原点より離れたところでは制御性能を改善できる可能性がある．これに関して著者は次節以降に述べる双線形システムの制御の他、線形システムに望ましい非線形特性を持たせる制御系の設計[9, 10]などを提案している．

さて、これら非線形 H_∞ 制御理論の限界と可能性以外に、実応用に関しては以下の点も認識しておく必要がある．

[実用化への課題]

- (6) 有用な評価出力の選び方の議論が十分ではない．
- (7) ハミルトンヤコビ偏微分不等式が容易に解けない．

線形 H_∞ 制御理論が産業界にも受け入れられた背景には有用な評価関数が周波数応答を基に示されたことが大きいと考えられる（感度関数、相補感度関数等）．しかし、非線形 H_∞ 制御では周波数応答の概念が使えないため、これらとは異なる評価関数を導入する必要がある．これに関しては個々の問題に対する評価出力の選び方のケーススタディを繰り返す以外にないと思う．次節で述べる双線形システムに対する制御と線形システムに対する非線形制御器の設計[9, 10]は著者の一つの回答である．

また、ハミルトンヤコビ偏微分不等式は非線形偏微分不等式であるため、解析的に解くことはほぼ不可能である。(7)への対応としてはハミルトンヤコビ偏微分方程式の数値解法を勢力的に研究する方法と、問題をハミルトンヤコビ偏微分不等式を解かずに(例えば代数リカッチ不等式を解くだけで)すます方法が考えられる。数值的にハミルトンヤコビ偏微分不等式(方程式)を解く方法はいくつか提案されている[14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22]が、現時点ではすべての場合において有効な方法はない。それに対して次節の双線形システムへの応用は問題を工夫することにより偏微分方程式を回避する方法である。

4 双線形システムに対する制御器の設計

この節では先に述べた非線形 H_∞ 制御の限界と可能性を考慮に入れた一つの設計手法として、著者らの提案している双線形システムに対する非線形 H_∞ 制御器の設計法[11, 12]について述べる。

4.1 双線形システム

ここで考える双線形システムとは制御入力 u が状態 x との掛け算で状態の変化 \dot{x} に作用するシステムで、状態空間表現が

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B_1w + \sum_{i=1}^m B_{2i}xu_i \\ &= Ax + B_1w + B(x)u\end{aligned}\quad (24)$$

で与えられるシステムである。明らかにシステム(24)は原点 $x = 0$ で $B(0) = 0$ となり、不可制御となる。そのため(直交条件を満たす)線形な評価出力

$$z = C_1x + D_{12}u\quad (25)$$

を用いると原点近傍では

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B_1w + O^2(x, u) \\ z &= C_1x + D_{12}u\end{aligned}\quad (26)$$

と線形近似されるため、 $u = 0$ が w から z のノルムの意味では最適な制御となってしまう(入力 u は x の挙動にほとんど作用しないので、評価出力 z を大きくしない $u = 0$ が最適となる)。さらに $u = 0$ なる制御器を用いると大域的に(原点近傍外においても)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B_1w \\ z &= C_1x\end{aligned}\quad (27)$$

となり、大域的にシステムの L_2 ゲインは原点近傍の L_2 ゲインと一致する。つまり、 $u = 0$ が大域的に L_2 ゲインを最小にしてしまい、このままでは有効な制御系の設計ができないシステムである。

4.2 非線形重みの導入による原点近傍外での応答改善

双線形システムに対して線形の評価出力を用いて有効な制御系が設計できないのは双線形システムが原点近傍では(ほとんど)不可制御なシステムであるからである。そのため、原点近傍では L_2 ゲインを下げることはできない。しかし、双線形システムでは原点近傍外ではシステムの可制御性が回復し、制御が有効になるはずである、しかし、線形な評価出力を考える限り、 L_2 ゲインは原点近傍での値で決まってしまうため、原点近傍外での応答の改善が不可能となってしまう。

そこで、評価出力として図1のブロック線図のように非線形重み $a_1(x), a_2(x)$ を導入することを考える。ここで簡単のために周波数重みの $W_2(s)$ を $W_2(s) = 1$ とすると、システムの一般化プラントは次式で表される。

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1w + B_2(x)u \\ z = a_1(x)C_1x + a_2(x)D_{12}u \end{cases}\quad (28)$$

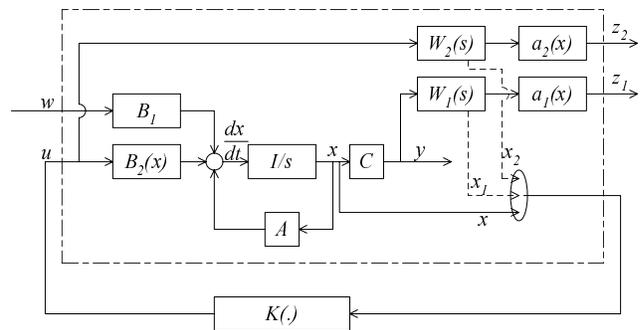


図1: 非線形重みを用いた一般化プラント

ここで $a_i(x)$ は非線形重み関数で、

$$\begin{aligned}a_1(x) &\approx 1 \quad (\text{原点近傍}) \\ a_1(x) &\gg 1 \quad (\text{原点近傍外})\end{aligned}\quad (29)$$

と選べば原点近傍外では $a_1 \equiv 1$ の場合に比べて状態 x の大きさをより抑えた制御をしなければ評価出力 z が小さくならない。つまり、原点近傍外で状態 x の大きさをより抑制する制御が可能となる。この非線形重みは直感的には図2に示すように原点近傍外で L_2 ゲインを積極的に下げる評価に相当する。

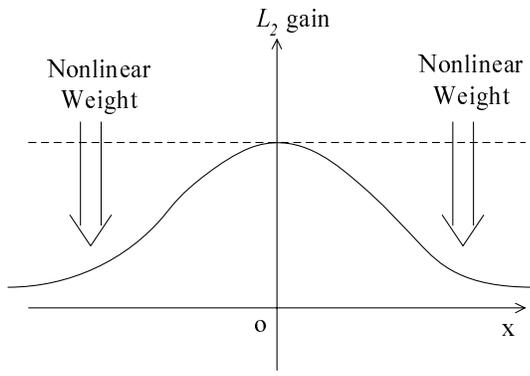


図 2: 非線形重みと L_2 ゲイン

このように非線形重みを導入することにより，原点近傍で応答を改善できないシステムでも，原点近傍外での応答を改善する事が可能となる．

4.3 ハミルトンヤコビ偏微分不等式の簡易解法

さて (28) の一般化プラントに対して非線形 H_∞ 制御を適用するとハミルトンヤコビ偏微分不等式を解く必要が生ずる．しかし，このような簡単に見える双線形システムにおいてもハミルトンヤコビ偏微分方程式を解くことは容易ではない．一方，我々が必要とする非線形重み $a_i(x)$ は関数が決まっている必要はなく，原点近傍で $a_1(x) \approx 1$ ，原点近傍外で $a_1(x) \gg 1$ であるだけでよい．そこで，このような非線形重みのうち，ハミルトンヤコビ偏微分不等式が解きやすいものを選ぶことにしよう．

式の展開を簡単にするために

$$C_1^T D_{12} = 0, \quad D_{12}^T D_{12} = I$$

を仮定する．一般化プラント (28) を線形近似し，線形 H_∞ 制御を用いるとリカッチ不等式は

$$PA + A^T P + \frac{1}{\gamma^2} P B_1 B_1^T P + C_1^T C_1 < 0 \quad (30)$$

となる事が容易に確かめられる．この $P > 0$ を用いてハミルトンヤコビ偏微分不等式の解を $V(x) = x^T P x$ と仮定し，この $V(x)$ がハミルトンヤコビ偏微分不等式の解である範囲で非線形重みを調整することにする．この $V(x)$ を (28) に対するハミルトンヤコビ偏微分不等式に代入して整理することにより以下を証明することができる [11, 12] ($a_2(x)$ を導入することにより，直交条件は満たされなくなるが，定理 2 と同様なハミルトンヤコビ偏微分不等式が導出される)．

【定理】

正定数 γ が与えられているとする．プラント (28) に対してリカッチ不等式 (30) を満たす正定対称行列 P が存

在し，さらに非線形重み $a_1(x)$ ， $a_2(x)$ が条件

$$\frac{1}{a_2^2(x)} x^T P B_2(x) B_2^T(x) P x + (1 - a_1^2(x)) x^T C_1^T C_1 x \geq 0 \quad (31)$$

を満たすならば状態フィードバック

$$u = -\frac{1}{a_2(x)} B_2^T(x) P x \quad (32)$$

により閉ループ系の L_2 ゲインは γ 以下となる．制御目的として

原点近傍外で状態 x の大きさを抑制する
 入力はできるだけ制限する

ことを考えれば，この拘束を満たす非線形重みのうち，

$a_1(x)$ は原点近傍外で大きくなる
 $a_2(x)$ は入力を制限するために
 できる限り大きくする

となるものを探せばよい．このような非線形重みとして以下がある．

【定理】

非線形重み $a_1(x)$ ， $a_2(x)$ が

$$a_1(x) = \sqrt{1 + m_0(x) x^T P B_2(x) B_2^T(x) P x} \quad (33)$$

$$a_2(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + m_0(x) x^T C_1^T C_1 x}} \quad (34)$$

であるならば条件 (31) を満たす．ただし， P はリカッチ不等式 (30) の正定対称解である．また $m_0(x)$ は任意の正定スカラー値関数である．このとき非線形な特性をもつ H_∞ 状態フィードバック制御器 u は次式で与えられる．

$$u = -(1 + m_0(x) x^T C_1^T C_1 x) B_2^T(x) P x \quad (35)$$

次節ではこの手法の自動車のセミアクティブサスペンションへの応用例について述べる [23]．

5 セミアクティブサスペンションシステムへの応用

近年，自動車の乗り心地の向上のため，路面の凹凸を車体の振動に伝えないための振動絶縁問題に対し様々な最適化アルゴリズムが研究されてきている．特にスカイフック制御は現在でもアクティブサスペンション（車輪と車体間のサスペンションにアクチュエータを加えて制振する方法）やセミアクティブサスペンション（サスペンションの減衰係数を可変にして制振する方法）に広く適用され，

商用化もされている．スカイフック系の実現には本来アクティブサスペンションが必要となるが，消費エネルギー・コストの面から，カルノップ近似則を用いた減衰力制御（セミアクティブサスペンション）によるスカイフック制御系が多く採用されている．スカイフック制御系は比較的計算量も少なく，バネ上（車体）制振に対し有効ではあるものの，それは主にバネ上共振付近の低周波数領域に限定されてしまう．また，近似則を用いることによる違和感等のデメリットもある．

一方， H_∞ ， μ 制御等の制御系設計手法は周波数領域で設計仕様を与えることができる為，サスペンション制御のような振動絶縁問題には非常に適している．しかし，セミアクティブサスペンションモデルは双線形システムであるため線形制御理論を直接適用することはできない．そこで，多くのケースではプラントをアクティブサスペンションモデルと仮定して線形制御理論を用いて制御系を設計し，その制御入力を減衰係数の変化で発生可能な力のなかから近似して制御を行っている．そのため，この場合も近似則を用いることによる違和感等のデメリットもある．

ここでは，セミアクティブサスペンションに前節で述べた非線形 H_∞ 制御を適用 [23] し，シミュレーション，および実車試験により線形 H_∞ 制御やスカイフック制御と比較する．

5.1 モデリング

ここではサスペンションモデルとして図 3 に示される 2 自由度モデルを用いている．このモデルは 1/4 車両モデルとして，車両の基本特性を調べるのに広く使用されているものである．

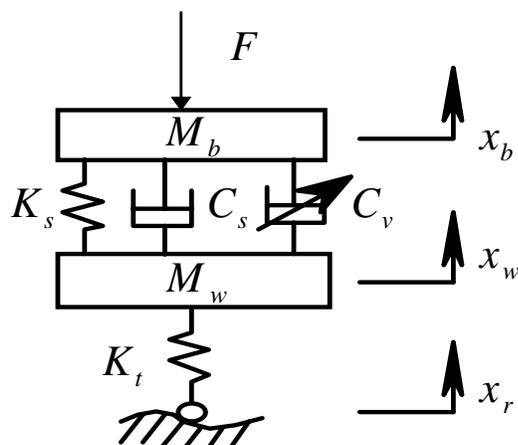


図 3: 単輪 2 自由度モデル

- M_b : バネ上質量（車体）
- M_w : バネ下質量（車輪）
- K_s : サスペンションのバネ定数
- K_t : タイヤ縦バネ定数（タイヤの弾性）
- C_s : 線形減衰係数
- C_v : 可変減衰係数
- x_b : バネ上（車体）変位
- x_w : バネ下（車輪）変位
- x_r : 路面変位
- F : 力外乱

車両のバネ上（車体 M_b ）とバネ下（車輪 M_w ）の間にバネ K_s と減衰力可変ショックアブソーバ $C_s + C_v$ からなるサスペンションが接続されている（減衰力可変ショックアブソーバはノミナル値 C_s と可変項 C_v とに分割されている）．また外乱となる路面の変動 x_r はバネ K_t で近似されたタイヤを通して車輪 M_w に作用している．また， F はバネ上に横風や旋回時荷重変動を想定した力外乱である．ここで制御入力は可変減衰係数 $u = C_v$ である．このモデルの運動方程式は次式で与えられる．

$$\begin{aligned} M_b \ddot{x}_b &= C_s (\dot{x}_w - \dot{x}_b) + C_v (\dot{x}_w - \dot{x}_b) \\ &\quad + K_s (x_w - x_b) + F \\ M_w \ddot{x}_w &= -C_s (\dot{x}_w - \dot{x}_b) - C_v (\dot{x}_w - \dot{x}_b) \\ &\quad - K_s (x_w - x_b) + K_t (x_r - x_w) \end{aligned} \quad (36)$$

制御目的はフラットな乗り心地の為のバネ上（車体）共振制振，快適な乗り心地の為の車両のゴツゴツ感低減，接地性向上の為のバネ下（車輪）共振制振の 3 つである．そのための評価としてバネ上制振に対してはバネ上速度（ \dot{x}_b ），乗り心地に対してはバネ上加速度（ \ddot{x}_b ），バネ下制振に対してはストローク速度（ $\dot{x}_w - \dot{x}_b$ ）を考え，それぞれに適切な周波数重みのためのフィルターと，非線形重みをかけたものを評価出力とし，これらをできるだけ小さくする制御系を設計する．また，外乱 w は路面変位外乱 \dot{x}_r と力外乱 F である．

詳細な状態方程式は省略するが，システムは双線形システムで表される．

一方，このシステムに対して線形 H_∞ 制御理論で制御系を設計する場合には入力を力入力 $\bar{u} = C_v (\dot{x}_w - \dot{x}_b)$ と

表 1: パラメータ

パラメータ	Physical meaning	Value
M_b	バネ上質量	375(kg)
M_w	バネ下質量	38(kg)
K_t	タイヤのバネ定数	240000(N/m)
K_s	サスバネ定数	21560(N/m)

5.2 シミュレーション・実験結果と考察

この節では、線形 H_∞ 制御と非線形 H_∞ 制御の制御性能のシミュレーション比較、および、実走行試験によるスカイフック制御と非線形 H_∞ 制御のバネ上制振性能比較の結果を示す。シミュレーションでは表 1 に示すパラメータを用いた。図 4 には 16 段減衰力可変アブソーバの減衰力特性を示す。

制御器の有効性を明確にするため、シミュレーション条件を以下のような設定とした。

- ・減衰力の立ち遅れなし
- ・アクチュエータは瞬時に応答する
- ・コントローラの演算周期は 10msec
- ・すべての状態は正確に観測可能である

図 5 ~ 図 8 には可変アブソーバをソフト固定（一番低い減衰係数に固定したもの）、ハード固定（一番高い減衰係数に固定した場合）、そして、制御（線形、非線形 H_∞ 制御）の周波数特性を示す（入力を 0.5 ~ 30Hz のログス

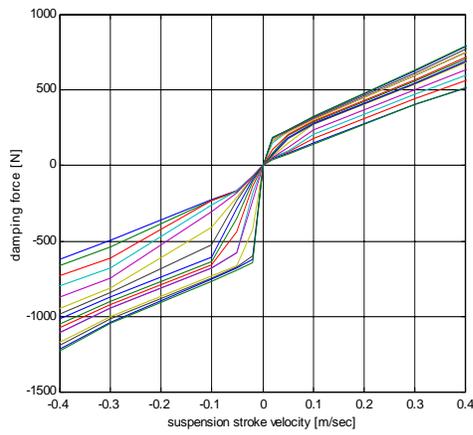


図 4: 減衰力特性

し、同様な評価出力と外乱を用いて一般化プラントを構成し、実際に入力では H_∞ 制御器にできるだけ近い力入力 \bar{u} が入るように C_v を決定する。

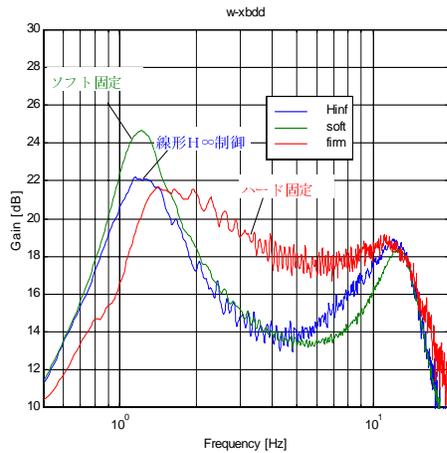


図 5: バネ上加速度周波数特性（線形 H_∞ 制御）

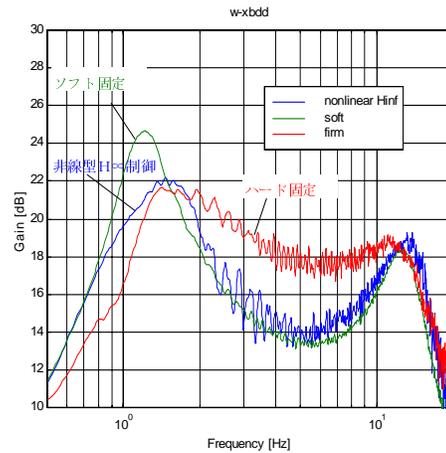


図 7: バネ上加速度周波数特性（非線形 H_∞ 制御）

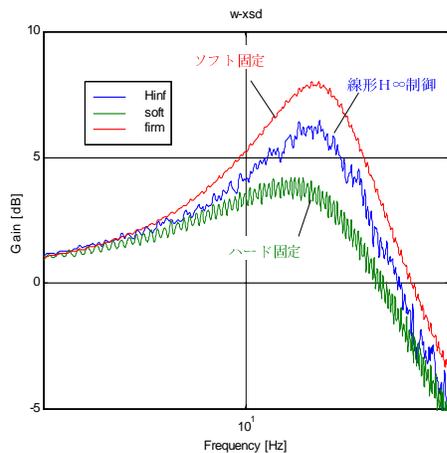


図 6: ストローク速度周波数特性（線形 H_∞ 制御）

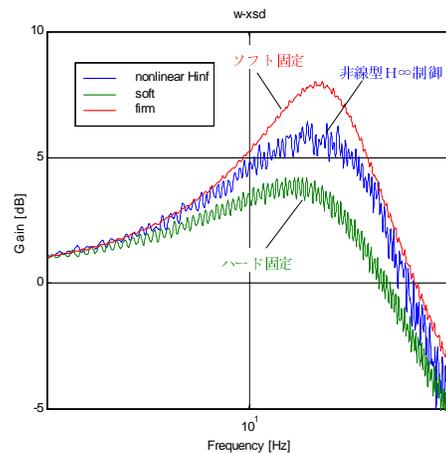


図 8: ストローク速度周波数特性（非線形 H_∞ 制御）

ープとし、出力をフーリエ変換したもの)。ソフト固定とハード固定は制御限界と考えられる(制御した場合の応答はこの間にあると考えられる)。

周波数重みをチューニングすることにより、線形 H_∞ 制御も非線形 H_∞ 制御も共に、閉ループ系の周波数整形を適切に行うことが可能となり、低周波の共振近くではハード固定と同程度、高周波ではソフト固定と同程度のゴツゴツ振動低減性能(パネ上加速度: 図 5, 図 7), そしてパネ下共振低減(ストローク速度: 図 6, 図 8)をそれぞれ達成した。

図 9, 図 10 では、パネ上加速度とストローク速度の時系列特性を示している。それぞれの信号のゲインは共に同レベルであるが、線形 H_∞ 制御のケースは、非線形 H_∞ 制御のに比べ信号の乱れが大きく発生している。

この信号の乱れは線形 H_∞ 制御と非線形 H_∞ 制御の要求減衰力のリサージュ波形である図 11, 図 12 を用いて説明できる。これらの図を図 4 の減衰力可変アブソーバの

減衰力特性と重ねたとき、減衰力特性と重なる部分が発生可能な減衰力となる。さて、図 11, 図 12 をみてみると、非線形 H_∞ 制御では、減衰力可変アブソーバが減衰力を発生できる第 1, 第 3 象限の領域に制御入力を制限することができるが、線形 H_∞ 制御ではそのような特性を持たせることはできないため、実現不可能な減衰力を多く要求することがわかる。この実現不可能な減衰力は以下に示すように可変アブソーバの減衰係数の急激な切り替えを要求する。

まず、要求減衰力(図 11)が第 2, 4 象限にある時を考える。この場合には減衰力特性(図 4)より、要求減衰力に一番近い減衰力はアブソーバの発生可能な最小減衰係数によって実現される。ここで要求減衰力が第 2 象限から第 1 象限(第 4 象限から第 3 象限)へ移動した場合を考えよう。第 1, 3 象限の縦軸付近(ストローク速度 0 の付近)の要求減衰力は可変アブソーバの最大減衰係数により達成される。つまり、要求減衰力が第 2 象限と第 1 象限(第 4 象限と第 3 象限)の間を移動する場合には減衰係数が急激

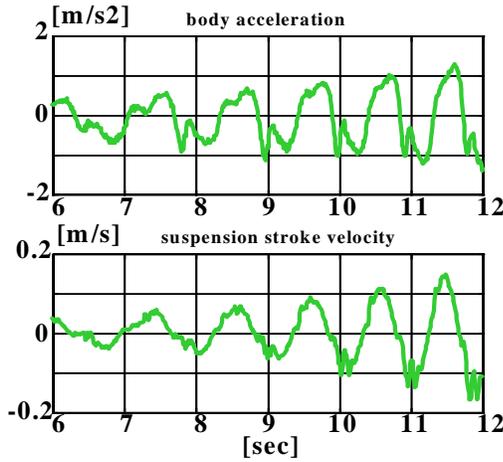


図 9: パネ上共振制振性能(線形 H_∞ 制御)

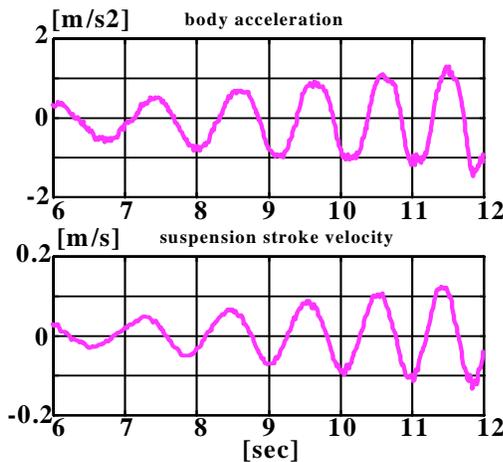


図 10: パネ上共振制振性能(非線形 H_∞ 制御)

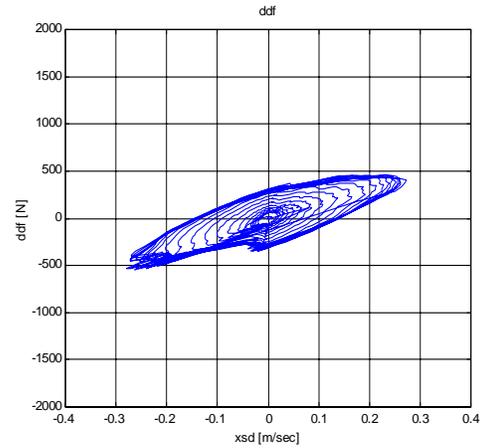


図 11: リサージュ波形(線形 H_∞ 制御)

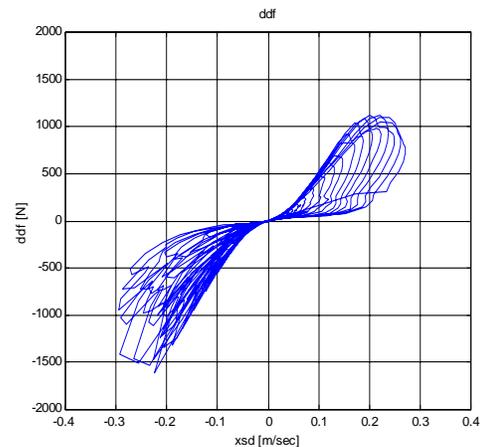


図 12: リサージュ波形(非線形 H_∞ 制御)

に最小から最大まで変化することになる。この減衰係数の急激な変化が図 9 における信号の乱れの原因となっていて考えられる（スカイフック制御も同様な問題がある）。その結果バネ上共振周波数付近でバネ上加速度に波形の乱れが現れ、ドライバに制御の違和感を感じさせてしまうこととなる。また、双線形システムを直接取り扱える非線形 H_∞ 制御は、設計時に与えた制御仕様（ L_2 ゲイン制約）を満たすことが保証されるが、制御入力を完全に再現することのできない線形 H_∞ 制御は設計時に与えた制御仕様（ H_∞ ノルム制約）を満たす保証は無くなってしまふ。

また、トヨタ試験車でスカイフック制御と非線形 H_∞ 制御の実車走行試験を行った結果、スカイフック制御のバネ上加速度には、線形 H_∞ 制御のシミュレーション結果と同様に、波形の乱れが確認され、ドライバーの官能評価においてもスカイフック制御に対して非線形 H_∞ 制御の方がバネ上制振性能の総合評点が高い結果となった。

6 おわりに

以上、非線形 H_∞ 制御理論を実システムに応用する際に考慮すべき理論の限界と可能性、またその可能性を最大限に利用した（と著者の考える）双線形システムに対する制御系設計法と、その自動車のセミアクティブサスペンションへの応用を示した。特にセミアクティブサスペンションの例では従来の設計手法より良い制御系が設計できることをシミュレーション及び実験により確認した。

本解説が非線形 H_∞ 制御の実応用への参考となれば幸いである。

参考文献

- [1] K. Zhou, J. C. Doyle, K. Glover. Robust and Optimal Control. Prentice-Hall, Inc., 1996.
- [2] 美多 勉. H_∞ 制御. 昭晃堂, 1994.
- [3] G. J. Balas, J. C. Doyle, K. Glover, A. Packard, R. Smith. μ -Analysis and Synthesis Toolbox. The MathWorks, Inc., 1994.
- [4] P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub, M. Chilali. LMI Control Toolbox User's Guide. The MathWorks, Inc., 1995.
- [5] 古賀雅伸. ロボット工学ソフトウェア利用の手引き（第 3 回）. 科学技術計算プログラミング言語 MaTX. 日本ロボット学会誌, 14(6):800–803, 1996.
- [6] 内田 健康他. H_∞ 制御の実プラントへの応用. コロナ社（計測自動制御学会）, 1996.
- [7] 井村順一. 非線形 H_∞ 制御-線形系の H_∞ 制御は非線形系にどこまで拡張可能か-. 計測と制御, 34(3):188–195, 1995.
- [8] A. J. van der Schaft. L_2 -Gain and Passivity Techniques in Nonlinear Control. Springer-Verlag, 1996.
- [9] 清水悦郎, 久保田健太, 三平満司, 古賀雅伸. 非線形 H_∞ 状態フィードバックをもちいた線形システムに対する非線形制御則の一設計法. 計測自動制御学会論文集, 35(3):333–339, 1999.
- [10] 清水悦郎, 三平満司, 古賀雅伸. 非線形 H_∞ 出力フィードバックをもちいた線形システムに対する非線形制御則の一設計法. 計測自動制御学会論文集（掲載予定）, .
- [11] 久保田健太, 三平満司, 古賀雅伸, 清水悦郎, 細川敦邦. 非線形重みを用いた双線形システムの非線形 H_∞ 制御. 第 25 回 制御理論シンポジウム資料, 371–376, 1996.
- [12] 清水悦郎, 久保田健太, 三平満司, 古賀雅伸. 双線形システムに対する非線形 H_∞ 状態フィードバック制御則の一設計法. 計測自動制御学会論文集（投稿中）, .
- [13] E. Shimizu, M. Sampei, H. Nakayama. Nonlinear H_∞ output feedback controller synthesis for bilinear systems using nonlinear weight. NOLCOS98, 181–184, 1998.
- [14] J. Huang, Ching-Fang Lin. Numerical approach to computing nonlinear H_∞ control laws. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 18:989–994, 1995.
- [15] W. Kang, P. K. De, A. Isidori. Flight control in a windshear via nonlinear H_∞ methods. 31st Conference on Decision and Control, pages 1135–1142, 1992.
- [16] Wei-Min Lu, J. C. Doyle. H_∞ control of nonlinear systems: A convex characterization. Proc. American Control Conference, pages 2098–2102, 1994.
- [17] L. Patpong, M. Sampei, M. Koga, E. Shimizu. A numerical computational approach of hamilton-jacobi-isaacs equation in nonlinear H_∞ control problems. 35st Conference on Decision and Control, pages 3774–3779, 1996.

- [18] 川田 昌克, 島津 尚充, 井上 和夫. 状態依存型係数形式表現の自由度を利用したハミルトンヤコビ不等式の一数值解法. システム制御情報学会論文誌, 11(7):401–410, 1998.
- [19] 河村英樹, 三平満司, 古賀雅伸, 清水悦郎, 中山尚登. 状態依存型係数形式表現の自由度を利用したハミルトンヤコビ不等式の一数值解法. 第 27 回 制御理論シンポジウム資料, 321–324, 1998.
- [20] 山下裕, 島公脩. Hamilton-Jacobi 偏微分方程式の一解法. 計測自動制御学会論文集, 34(6):571–576, 1998.
- [21] 坂本登, 濱田和恭. 非線形 H_∞ 制御理論におけるハミルトン・ヤコビ方程式の解法. 第 27 回 制御理論シンポジウム資料, pages 233–236, 1998.
- [22] M. R. James, J. S. Baras. Partially observed differential games, infinite-dimensional hamilton-jacobi-isaacs equations, and nonlinear H_∞ control. SIAM J. Control and Optimization, 34(4):1342–1364, 1996.
- [23] S. Ohsaku, T. Nakayama, I. Kamimura, Y. Motozono. Nonlinear H_∞ state feedback controller for semi-active controlled suspension. AVEC '98, 63–68, 1998.

A 非線形システムの有界実補題

以下の非線形システム S_{zw} を考える .

$$S_{zw} \begin{cases} \dot{x} &= f(x) + g(x)w \\ z &= h(x) \end{cases} \quad (37)$$

【有界実補題】

システム S_{zw} が $\|S_{zw}\|_{L2} < \gamma$ であるための必要十分条件は, つぎのハミルトンヤコビ不等式

$$\frac{\partial V}{\partial x^T} f + \frac{1}{4\gamma^2} \frac{\partial V}{\partial x^T} g g^T \frac{\partial V}{\partial x} + h_1^T h_1 + \varepsilon x^T x \leq 0 \quad (38)$$

を満たす正定関数 $V(x)$ および正定数 ε が存在することである .

(略証)

ここでは十分性のみを証明する . まず指数安定性を証明する . ハミルトン・ヤコビ不等式 (38) をテイラー展開して 2 次近似すると

$$x^T \left(PA + A^T P + \frac{1}{\gamma^2} P B B^T P + C^T C + \varepsilon I \right) x + O(\|x\|^3) \leq 0 \quad (39)$$

ただし

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 2Px + O(\|x\|^2) \quad (P > 0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = Ax + O(\|x\|^2),$$

$$g(0) = B + O(\|x\|)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = Cx + O(\|x\|^2)$$

である . これより非線形システム S_{zw} の一次近似システムは安定であるから, システム S_{zw} の指数安定性は明らかである . つぎに $\|S_{zw}\|_{L2} < \gamma$, すなわち $\|z\|_2 < \gamma\|w\|_2$ を証明する (37) より $z = h(x)$ であるから

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^T \{ \gamma^2 \|w\|^2 - \|z\|^2 \} dt \\ &= \int_{t_0}^T \{ \gamma^2 \|w\|^2 - h^T(x)h(x) \} dt \end{aligned} \quad (40)$$

さらにハミルトン・ヤコビ不等式 (38) より

$$\frac{\partial V}{\partial x^T} f + \frac{1}{4\gamma^2} \frac{\partial V}{\partial x^T} g g^T \frac{\partial V}{\partial x} + \varepsilon x^T x \leq -h^T h \quad (41)$$

であるから

$$(40) \geq \int_{t_0}^T \left\{ \gamma^2 \|w\|^2 + \frac{\partial V}{\partial x^T} f \right. \quad (42)$$

$$\left. + \frac{1}{4\gamma^2} \frac{\partial V}{\partial x^T} g g^T \frac{\partial V}{\partial x} + \varepsilon x^T x \right\} dt \quad (43)$$

ここで (43) を w について平方完成を行うと

$$(43) = \int_{t_0}^T \left\{ \gamma^2 \|w - \frac{1}{2\gamma^2} g^T \frac{\partial V}{\partial x}\|^2 + \frac{\partial V}{\partial x^T} (f + gw) \right\} dt \quad (44)$$

であり (37) より $f(x) + g(x)w = \dot{x}$ であるから

$$\begin{aligned} (44) &= \int_{t_0}^T \left\{ \gamma^2 \|w - \frac{1}{2\gamma^2} g^T \frac{\partial V}{\partial x}\|^2 + \frac{\partial V}{\partial x^T} \frac{dx}{dt} \right\} dt \\ &= V(x(T)) - V(x(t_0)) \\ &\quad + \gamma^2 \int_{t_0}^T \left(\|w - \frac{1}{2\gamma^2} g^T \frac{\partial V}{\partial x}\|^2 \right) dt \end{aligned} \quad (45)$$

となる . ここで $V(x)$ は正定関数であり, $x(t_0) = 0$ のもとで, $V(x(t_0)) = 0$ であるならば,

$$\int_{t_0}^T \{ \gamma^2 \|w\|^2 - \|z\|^2 \} dt \geq 0 \quad (46)$$

である . よって $T \rightarrow \infty$ より

$$\|z\|_2 \leq \gamma \|w\|_2 \quad (47)$$

である .