1998 Technical Report

非ホロノミック Driftless システムのフィードバック制御

三平 満司* 石川 将人 *

1 はじめに

非ホロノミックとは機械力学で定義されている言葉で，一般に位置，姿勢角のみで記述されない拘束（例えば拘束が速度や加速度）で表されるものである．このようなシステムが制御理論の観点から注目を集めたのはその拘束自体の特異性ではなく，非ホロノミックな拘束を持つ機械系の多くが理論的にも制御しづらい状態方程式として表されるからである．

ここでは制御理論の意味からこの状態方程式がどのように難しいのか，また，それに対する解決法としてどのような制御則が提案されているかについて車両のモデルを例としてみていく．

非ホロノミックな拘束の代表例として位置・速度の拘束と，位置・速度・加速度の拘束がある．位置・速度・加速度の拘束についてはここでは触れないが，かなり難しい要素を含んでいる（[19] などを参照されたい）．それに対して位置と速度の拘束を受けるシステム，特に速度を入力と考えることにより driftless 状態方程式で表されるシステム (例えば車両モデル) に関しては多くの制御則が提案されている．

本稿では driftless 状態方程式で表されるシステムとその一例である車両モデルに関して，制御理論的にその制御の難しさを示し，今まで提案されている制御方法について概観する．また，シミュレーションによって各制御系の特徴を明らかにする．

2 非ホロノミック系の例 – 二輪車両 –

本解説では例題として図 1 の二輪車両を考える．このシステムは速度拘束（非ホロノミック拘束）を持つもっとも簡単なシステムであるが，非ホロノミック系の根本的な制御の難しさを持っているシステムである．

2.1 車両モデルと非ホロノミック拘束

図 1 の二輪車両において x, y は両輪の中点 P の座標を，θ は車軸と垂直な方向（車両の進行方向）と x 軸のなす角を表している．また，η は P の道のりを表し，$d\eta/dt$ は車両の速度を表すものとする．また，左右の車両の半径はそれぞれ R_l, R_r とし，車輪の間の距離を $2W$ とする．

さて，左右の車輪をそれぞれ角速度 ω_l, ω_r で回転させるとき，両輪が横滑り及び空回りをしないと仮定すると，両輪の中点 P は車軸と垂直方向（ x 軸に対して角度 θ の方向）にしか移動できない．これは P の速度 $d\eta/dt$ と x 方向の速度 dx/dt, y 方向の速度 dy/dt の間に

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\eta}{dt}\cos\theta, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{d\eta}{dt}\sin\theta \tag{1}$$

または同値な条件として

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt}\tan\theta \tag{2}$$

なる拘束条件が存在することを意味している．これは車両の位置・速度で表される非ホロノミック拘束である．

2.2 車両の状態方程式

車輪の速度を入力として車両の状態方程式を求めてみよう．簡単のためにシステムの入力 u_1, u_2 を車両の並進速度 $d\eta/dt$ と回転角速度 $d\theta/dt$ と選ぶことにする．簡単な幾何学的な計算から

$$u_1 = \frac{d\eta}{dt} = \frac{R_l\omega_l + R_r\omega_r}{2} \tag{3-a}$$

$$u_2 = \frac{d\theta}{dt} = \frac{-R_l\omega_l + R_r\omega_r}{2W} \tag{3-b}$$

と表される．車両系の状態方程式は (1) と (3) より

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} u_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u_2 \tag{4}$$

と表せる．

後の議論を簡単にするため，状態変数を表すベクトルを $\xi = (x, y, \theta)^T$ と定義して状態方程式を

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \begin{pmatrix} \cos\xi_3 \\ \sin\xi_3 \\ 0 \end{pmatrix} u_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u_2 \\ &= f_1(\xi)u_1 + f_2(\xi)u_2 \end{aligned} \tag{5}$$

と表わしておく．このような状態方程式は入力に独立な項 (drift 項–線形システムの場合には Ax の項にあたる) がないため，driftless システムと呼ばれる．

3 連続な状態フィードバックで安定化できない状態方程式

車両の状態 ξ を 0 にする（位置 $(x, y) = (0, 0)$，姿勢角 $\theta = 0$ とする）制御を考えよう．

*東京工業大学大学院情報理工学研究科情報環境学専攻 〒 152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1

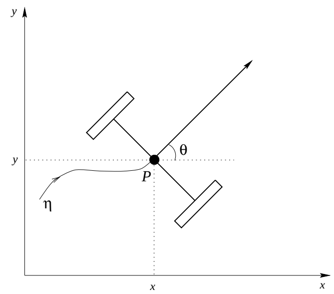

Figure 1: 二輪車両

3.1 近似線形化で制御できないシステム

非線形状態方程式で表されるシステムを制御する一番簡単な方法は状態方程式の左辺をテーラー展開の１次近似をして近似線形状態方程式で表し，この近似線形システムに対して従来の線形制御理論を用いて制御系を設計する方法である．しかし，二輪車両の状態方程式 (5) ではこの方策が使用できない．なぜなら線形近似システムは

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{dt} &= f_1(0)u_1 + f_2(0)u_2 + O^2(\xi, u_1, u_2) \\ &= \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} u_1 + \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} u_2 + O^2(\xi, u_1, u_2)\end{aligned} \tag{6}$$

となり，明らかに不可制御なシステムとなる．これを一般化すれば，

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{f}_1(\bar{x})u_1 + \cdots + \bar{f}_m(\bar{x})u_m \tag{7}$$

のように，状態数 n が入力数 m より大きい driftless system は常に線形近似が不可制御になる．

3.2 非線形システムの可制御性

前節で述べたように状態方程式 (5) の線形近似システムは不可制御である．それでは元の非線形状態方程式は不可制御なのであろうか．(非線形システムの可制御性，正確には可到達性の定義は複雑であるのでここでは述べない．ここで言う可制御性は直感的な意味で解釈されたい）．答えは否である．それは，どのような初期値からも物理的に車両を原点（ $(x, y, \theta) = (0, 0, 0)$ ）に移動させることができることからも明らかであろう．

それでは非線形制御理論を用いて考えるとどう考えればいいのであろうか．一般論を考えるためにいま (5) の状態が n 次元で表される場合を考えよう．

いま状態が $\xi = \xi_0$ であると仮定する．このとき $u_1 = 1$, $u_2 = 0$ とすれば状態の時間微分は $\dot{\xi} = f_1(\xi_0)$ となり，状態は $f_1(\xi_0)$ の方向に移動できる．同様に $u_1 = 0$, $u_2 = 1$ とすれば状態は $f_2(\xi_0)$ 方向に移動できる．つまり，状態は $\xi = \xi_0$ のとき $f_1(\xi_0)$ と $f_2(\xi_0)$ 方向に移動できることになる．それでは状態はこれらの方向以外には移動できないのだろうか．このことを調べるために初期値 $\xi(0) = \xi_0$ のときに次のような入力を考える．以下で t_1 と t_2 は十分小さい定数と仮定する．

$$\begin{array}{lll} u_1(t) = 1 & u_2(t) = 0 & (0 \le t < t_1) \\ u_1(t) = 0 & u_2(t) = 1 & (t_1 \le t < t_1 + t_2) \\ u_1(t) = -1 & u_2(t) = 0 & (t_1 + t_2 \le t < 2t_1 + t_2) \\ u_1(t) = 0 & u_2(t) = -1 & (2t_1 + t_2 \le t < 2t_1 + 2t_2) \end{array} \tag{8}$$

このとき，システムの状態はそれぞれ

$$\begin{array}{ll} \frac{d\xi}{dt} = f_1(\xi) & (0 \le t < t_1) \\ \frac{d\xi}{dt} = f_2(\xi) & (t_1 \le t < t_1 + t_2) \\ \frac{d\xi}{dt} = -f_1(\xi) & (t_1 + t_2 \le t < t_1 + t_2 + t_1) \\ \frac{d\xi}{dt} = -f_2(\xi) & (t_1 + t_2 + t_1 \le t < t_1 + t_2 + t_1 + t_2) \end{array} \tag{9}$$

なる状態方程式に従って遷移する．

さて，一般にシステムの状態方程式が

$$\frac{d\xi}{dt} = f(x) \tag{10}$$

で与えられるとき

$$\begin{aligned}\frac{d^2\xi}{dt^2} &= \frac{d}{dt}\frac{d\xi}{dt} = \frac{d}{dt}f(\xi) \\ &= \frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial f}{\partial \xi}f(\xi)\end{aligned} \tag{11}$$

であることから，時間応答の時間 t に関する２次近似は

$$\begin{aligned}\xi(t) &= \xi(0) + \left.\frac{d\xi}{dt}\right|_{\xi(0)} t + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2\xi}{dt^2}\right|_{\xi(0)} t^2 + O^3(t) \\ &= \xi(0) + f(\xi(0))t + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial f}{\partial \xi}\right|_{\xi(0)} f(\xi(0))t^2 \\ &\quad + O^3(t)\end{aligned} \tag{12}$$

と与えられる．ただし，ここで n 次元の縦ベクトル値関数 $f(\xi)$ の第 i 要素を $f_{(i)}(\xi)$ とするとき， $\frac{\partial f}{\partial \xi}$ は次の行列値関数である．

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_{(1)}}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f_{(1)}}{\partial \xi_2} & \cdots & \frac{\partial f_{(1)}}{\partial \xi_n} \\ \frac{\partial f_{(2)}}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f_{(2)}}{\partial \xi_2} & \cdots & \frac{\partial f_{(2)}}{\partial \xi_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_{(n)}}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f_{(n)}}{\partial \xi_2} & \cdots & \frac{\partial f_{(n)}}{\partial \xi_n} \end{pmatrix} \tag{13}$$

同様にシステムの状態方程式が

$$\frac{d\xi}{dt} = -f(x) \tag{14}$$

で与えられるとき

$$\begin{aligned}\frac{d^2\xi}{dt^2} &= \frac{d}{dt}\frac{d\xi}{dt} = -\frac{d}{dt}f(\xi) \\ &= -\frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial f}{\partial \xi}f(\xi)\end{aligned} \tag{15}$$

であることから，時間応答の時間 t に関する２次近似は

$$\xi(t) = \xi(0) - f(\xi(0))t + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial f}{\partial \xi}\right|_{\xi(0)} f(\xi(0))t^2 + O^3(t) \tag{16}$$

となる．これらを用いて (9) の初期値 $\xi(0)=\xi_0$ に対する応答の t_1 と t_2 に対する 2 次近似を求めてみよう．明らかに $\xi(t_1)$ は

$$\xi(t_1)=\xi_0+f_1(\xi_0)t_1+\frac{1}{2}\left.\frac{\partial f_1}{\partial\xi}\right|_{\xi_0}f_1(\xi_0)t_1^2+O^3(t_1) \quad (17)$$

となる．この 2 次以下の項を

$$\xi_1^*:=\xi_0+f_1(\xi_0)t_1+\frac{1}{2}\left.\frac{\partial f_1}{\partial\xi}\right|_{\xi_0}f_1(\xi_0)t_1^2 \quad (18)$$

と表しておくと，$\xi(t_1+t_2)$ は

$$\begin{aligned}\xi(t_1+t_2) &= \xi(t_1)+f_2(\xi(t_1))t_2\\ &\quad+\frac{1}{2}\left.\frac{\partial f_2}{\partial\xi}\right|_{\xi(t_1)}f(\xi(t_1))t_2^2+O^3(t_1,t_2)\\ &= \xi_0+f_1(\xi_0)t_1+\frac{1}{2}\left.\frac{\partial f_1}{\partial\xi}\right|_{\xi_0}f_1(\xi_0)t_1^2\\ &\quad+f_2(\xi_0+f_1(\xi_0)t_1+\frac{1}{2}\left.\frac{\partial f_1}{\partial\xi}\right|_{\xi_0}f_1(\xi_0)t_1^2)t_2\\ &\quad+\frac{1}{2}\left.\frac{\partial f_2}{\partial\xi}\right|_{\xi_1^*}f_2(\xi_1^*)t_2^2+O^3(t_1)\\ &= \xi_0+f_1(\xi_0)t_1+\frac{1}{2}\left.\frac{\partial f_1}{\partial\xi}\right|_{\xi_0}f_1(\xi_0)t_1^2+f_2(\xi_0)t_2\\ &\quad+\left.\frac{\partial f_2}{\partial\xi}\right|_{\xi_0}f_1(\xi_0)t_1t_2+\frac{1}{2}\left.\frac{\partial f_2}{\partial\xi}\right|_{\xi_0}f(\xi_0)t_2^2\\ &\quad+O^3(t_1)\end{aligned} \quad (19)$$

となる．この計算を繰り返していくと最終的に以下を得る．

$$\xi(t_1+t_2+t_1+t_2)=\\ \xi_0+\left(\left.\frac{\partial f_2}{\partial\xi}\right|_{\xi_0}f_1(\xi_0)-\left.\frac{\partial f_1}{\partial\xi}\right|_{\xi_0}f_2(\xi_0)\right)t_1t_2+O^3(t_1,t_2) \quad (20)$$

これは，初期値が $\xi(0)=\xi_0$ のとき，状態が

$$\left.\frac{\partial f_2}{\partial\xi}\right|_{\xi_0}f_1(\xi_0)-\left.\frac{\partial f_1}{\partial\xi}\right|_{\xi_0}f_2(\xi_0) \quad (21)$$

の方向にも移動できることを示している．この方向は Lie bracket で表される．Lie bracket $[f_1,f_2](\xi)$ は次で表される縦ベクトル値関数として微分幾何学で定義されている．

$$[f_1,f_2](\xi)=\frac{\partial f_2}{\partial\xi}f_1(\xi)-\frac{\partial f_1}{\partial\xi}f_2(\xi) \quad (22)$$

これを用いれば状態は $[f_1,f_2](\xi_0)$ 方向にも移動できると言い換えることができる．これを繰り返せば状態は初期値 $\xi(0)=\xi_0$ から $f_1(\xi_0)$, $f_2(\xi_0)$, $[f_1,f_2](\xi_0)$, $[f_1,[f_1,f_2](\xi_0)$, $\cdots$ 方向に移動できることになる．もし，これらが n 本の線形独立なベクトルで表されるならば，状態は任意の方向に移動できる，つまり，ある意味で可制御と考えることができる．ある意味でと書いたのはこの可制御性が線形システムで言う可制御性と完全には対応していないからであるが，ここでは詳細は省略する．

さて，これを二輪車両のシステムについて考えてみよう．二輪車両の場合

$$\begin{aligned}f_1(\xi) &= \begin{pmatrix}\cos(\xi_3)\\ \sin(\xi_3)\\ 0\end{pmatrix}\\ f_2(\xi) &= \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\\ [f_1,f_2](\xi) &= \frac{\partial f_2}{\partial\xi}f_1(\xi)-\frac{\partial f_1}{\partial\xi}f_2(\xi)\\ &= 0\cdot f_1(\xi)-\begin{pmatrix}0&0&-\sin(\xi_3)\\ 0&0&\cos(\xi_3)\\ 0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-\sin(\xi_3)\\ \cos(\xi_3)\\ 0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

となり，これらは 3 次元空間を張る．つまり，二輪車両システムは直感のみでなく，非線形システム理論的にも（なんらかしらの意味で）可制御であることが示された．

3.3 静的連続状態フィードバックで安定化できないシステム [8]

これまで述べたように二輪車両システムは線形近似システムは可制御ではないが，非線形システムの意味では可制御なシステムである．とすればこのシステムを安定化することは容易なのであろうか．状態方程式 (5) を安定化させるためには状態フィードバック

$$u_1=\gamma_1(\xi),\qquad u_2=\gamma_2(\xi) \quad (23)$$

を考えるのが普通であろう（ $\gamma_i(\xi)$ が状態 ξ に関して連続な関数であるとき，このフィードバックを静的連続状態フィードバックと呼ぶことにする）．しかし，車両システムの場合には $\gamma_i(\xi)$ が状態 ξ に関して連続な関数では安定化できないことが以下のように容易に証明できる．

状態方程式 (5) を安定にする連続状態フィードバック (23) が存在したと仮定しよう．つまり，閉ループ系

$$\frac{d\xi}{dt}=f_1(\xi)\gamma_1(\xi)+f_2(\xi)\gamma_2(\xi) \quad (24)$$

が安定である（$\xi\to 0$ となる）と仮定する．このとき f_1, f_2 に適当な仮定をおくことにより絶対値の十分小さな定値外乱 $\delta\in\mathrm{R}^n$ に対して

$$\frac{d\xi}{dt}=f_1(\xi)\gamma_1(\xi)+f_2(\xi)\gamma_2(\xi)+\delta \quad (25)$$

の解は最終的に原点の十分近い近傍内に留まることが証明できる（絶対値の十分小さな外乱に対して状態が原点近傍に留まるようにすることは実際の制御でも重要である）．さらにこのとき，この近傍の中に平衡点 ξ_δ が存在することが証明できる．ξ_δ が平衡点であるということは状態の時間微分が 0 ということだから

$$0=f_1(\xi_\delta)\gamma_1(\xi_\delta)+f_2(\xi_\delta)\gamma_2(\xi_\delta)+\delta \quad (26)$$

を満たさなければならない．これは

$$f_1(\xi_\delta)u_1 + f_2(\xi_\delta)u_2 = -\delta \tag{27}$$

を満たす原点に十分近い ξ_δ と u_1, u_2 が存在することを示している．これがシステムが静的連続状態フィードバックで安定化できるための必要条件となる．

逆に条件が満たされないとき（原点に十分近い ξ_δ と u_1, u_2 が存在しないとき）にはシステムは静的連続状態フィードバックで安定化できないことになる．

この一般形として以下の定理が知られている（直感的に理解できるようにオリジナルの定理とは別の表現にしていることを了承されたい）．

定理 1 (Brockett[3]). 非線形状態方程式 $dx/dt = f(x,u)$ を考える（ $x \in R^n$:状態, $u \in R^m$:入力）．いま $f(0,0)=0$ であり，かつ $f(x,u)$ が $x=0$, $u=0$ の近傍で連続微分可能であるとするとき，このシステムに対して静的連続状態フィードバックが存在してシステムが漸近安定化されるための必要条件は，任意の $x=0$ を含む開集合 $N_x \subset R^n$ と $u=0$ を含む開集合 $N_u \subset R^m$ に対して原点を含む開集合 $N \subset R^n$ が存在し，任意の $\delta \in N$ に対して $f(x,u)=\delta$ の解 x, u が N_x, N_u の中に含まれることである．

これを二輪車両の状態方程式 (5) に応用すれば，絶対値の十分小さな $\delta = (\delta_1, \delta_2, \delta_3)^T$ に対して

$$\begin{pmatrix} \cos\xi_3 \\ \sin\xi_3 \\ 0 \end{pmatrix} u_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u_2 = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{pmatrix} \tag{28}$$

を満たす原点に十分近い ξ と u_1, u_2 が存在するかどうかを調べればよい．いま，十分小さい正の実数 ε に対して

$$\delta_1 = \frac{1}{2}\varepsilon, \quad \delta_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\varepsilon \tag{29}$$

とすると明らかに u_1 と ξ_3 は

$$u_1 = \varepsilon, \quad \xi_3 = \frac{\pi}{3} \tag{30}$$

となり，ξ_3 が十分原点に近いとはいえない．つまり，二輪車両システムは静的連続状態フィードバックで安定化できないシステムということになる．

このように簡単に見える二輪車両の状態方程式 (5) が非線形制御理論的に見れば非常に複雑なシステムであることがわかる．これを一般化すれば (7) のシステムにおいて，状態数 n が入力数 m より大きく，かつ $\{\bar{f}_1(0)\cdots\bar{f}_m(0)\}$ が線形独立である driftless system も連続状態フィードバックで制御できないシステムとなる．

一般にノンホロノミックな拘束を持つシステムはこのような連続状態フィードバックで安定化できない状態方程式で表されることが多いので，近年注目を浴び，多くの研究がなされるようになった．

4 静的連続状態フィードバックで安定化できないシステムの制御

静的連続状態フィードバックで安定化できない非ホロノミック系の制御方法には基本的に以下の3つがある．

時変状態フィードバックによる（指数）安定化

不連続フィードバックによる（指数）安定化

時間軸状態制御形による制御方策

これらについての詳細な解説は紙面の都合上不可能であるので，ここでは今まで提案されている代表的な制御方法を車両に応用した場合の制御則とその直感的意味，そしてシミュレーションによる比較について述べる．

4.1 Chained form と時間軸状態制御形

以下のような構造を持つ driftless システムを chained form と呼ぶ [8].

$$\dot{z} = g_1(z)v_1 + g_2 v_2 \tag{31}$$

$$g_1(z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-1} \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

実用的にも有用な2入力非ホロノミック系の多くが座標変換と入力変換により chained form に変換できることがわかっている．Chained form はある種の正準系として考えられており，これに対して多くの開ループ，閉ループ制御手法が提案されている（次節以降を参照）．

また，さらなる入力変換として

$$\mu_1 = v_1, \quad \mu_2 = \frac{v_2}{v_1} \tag{32}$$

を施すとシステムを次のように分離することができる．

$$\frac{d}{dz_1}\begin{pmatrix} z_n \\ z_{n-1} \\ \vdots \\ z_3 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{n-1} \\ z_{n-2} \\ \vdots \\ z_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mu_2 \tag{33-a}$$

$$\frac{dz_1}{dt} = \mu_1 \tag{33-b}$$

ここで第1式は時間軸として t の代わりに z_1 を用いた状態方程式であるが，通常の可制御正準形で表され，従来の線形制御理論で安定化可能な状態方程式である．この部分は状態制御部と呼ばれている．第2式は第1式の時間軸となる z_1 を制御する部分で時間軸制御部と呼ばれている．これらをまとめて時間軸状態制御形と呼ぶ [11][12].

このように chained form で表されるシステムは時間軸状態制御形で表せる．通常の時間軸状態制御形では状態制御部が状態フィードバックで安定化可能であればよいので [11] 非線形状態方程式になってもよい．その意味で時間軸状態制御形で表せるシステムは chained form で表せるシステムよりもクラスが広いといえる．時間軸状態制御形の一般形については文献 [11][12] を参照されたい．

さて，車両の例に戻ってみよう．簡単な計算により車両システム (5) は座標変換

$$z_1 = \xi_1 \tag{34-a}$$
$$z_2 = \tan\xi_3 \tag{34-b}$$
$$z_3 = \xi_2 \tag{34-c}$$

および入力変換

$$u_1 = \frac{v_1}{\cos\xi_3} \tag{35-a}$$
$$u_2 = \cos^2\xi_3 v_2 \tag{35-b}$$

により，chained form

$$\dot{z_1} = v_1 \tag{36-a}$$
$$\dot{z_2} = v_2 \tag{36-b}$$
$$\dot{z_3} = z_2 v_1 \tag{36-c}$$

に，またさらなる入力変換

$$\mu_1 = v_1 \tag{37-a}$$
$$\mu_2 = \frac{v_2}{v_1} \tag{37-b}$$

により時間軸状態制御形

$$\frac{d}{dz_1}\begin{pmatrix} z_3 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\mu_2 \tag{38-a}$$
$$\frac{dz_1}{dt} = \mu_1 \tag{38-b}$$

に変換される．

なお，この座標変換は $-\frac{\pi}{2} \leq \xi_3 \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲でしか定義されないので，以降で述べる「大域的安定」とは座標変換の有効な範囲において局所的に安定，を意味するに過ぎない．

4.2 時間軸状態制御形を用いた制御

一番直感的であり，他の制御則を理解する助けにもなる時間軸状態制御形を用いた制御方策 [11][12] についてはじめに述べる．

車両系の場合，状態制御部 (38-a) は線形であるからこれを安定化するフィードバック

$$\mu_2 = -k_2 z_2 - k_3 z_3 \tag{39}$$

を求めることは容易である．そこで，時間軸制御部 (38-b) の入力 μ_1 として正の値を用いて時間 z_1 を単調増加させ，状態制御部 (38-a) に対しては μ_2 として安定化フィードバック則を与えると，z_1 は通常の時間軸 t のように単調増加するので，z_2, z_3 を 0 に収束させることが可能となる．

z_1 を減少させる場合には $z_1' = -z_1$ と定義し，状態制御部を z_1' を時間軸として書き直すと

$$\frac{d}{dz_1'}\begin{pmatrix} z_3 \\ z_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} z_2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\mu_2 \tag{40}$$

となる．このシステムも線形であるから安定化フィードバックを設計することは容易である．例えば

$$\mu_2 = k_2 z_2 - k_3 z_3 \tag{41}$$

は (40) を安定化する．

これを用いれば，z_1' が単調増加するとき（ z_1 が単調減少するとき）z_2, z_3 を 0 に収束させることができる．これら z_1 の増加，減少を繰り返すことによりすべての状態を 0 に収束させる方法が時間軸状態制御形を用いた制御方策の基本となる．この制御則を用いたとき，変換する前の入力 v_2 は

$$\begin{aligned} v_2 &= \begin{cases} -k_2 z_2 v_1 - k_3 z_3 v_1, & v_1 > 0 (\dot{z}_1 > 0) \\ k_2 z_2 v_1 - k_3 z_3 v_1, & v_1 < 0 (\dot{z}_1 < 0) \end{cases} \\ &= -k_3 z_3 v_1 - k_2 z_2 |v_1| \end{aligned} \tag{42}$$

となる．また z_1 の制御に関しては，z_1 を 0 に指数収束させたければ定数 $\lambda > 0$ を用いて $v_1 = -\lambda z_1$ とすればよい．

この制御則を物理的に解釈するとどうなるだろうか．座標変換の定義より $z_1 = x$ であるから，z_1 の増減は車両の x 方向への動きとなる．z_2, z_3 はそれぞれ y, θ の情報で，これらを 0 にするということは y, θ を 0 にすることに対応する．つまり，この制御則は車両を前進・後退させながら (x を増減させながら) μ_2 を用いて車両を x 軸に追従させる (y, θ を 0 にする) 動作を繰り返していることになる．後に説明する時変フィードバックによる安定化のなかにはこの切り返しをシステマティックに行っていると考えられるものがある．

4.3 時変コントローラを用いた制御

Chained form で表される非ホロノミック系に対して時変コントローラーで安定化しようという試みが多くの研究者によりなされている．ここでは代表的な方法の方針と，車両系に応用した場合のコントローラについて概観する．一般論についてはオリジナルの論文を参照されたい．

4.3.1 Sordalen の $\mathcal{K}$ 指数安定器

Sordalen and Egeland [15] は chained form で表されるシステムの原点が $\mathcal{K}$-指数安定性となるコントローラーを提案した．原点が $\mathcal{K}$-指数安定とは，原点の近傍で正数 λ および class $\mathcal{K}$ の関数 $\zeta(\cdot)$（正の実数を正の実数に変換する連続かつ狭義単調増加な関数で $\zeta(0) = 0$ を満たす）が存在して

$$\|z(t)\| \leq \zeta(\|z(0)\|)e^{-\lambda t}$$

が満たされることをいう．通常の指数安定性の定義は定数 $H > 0$ を用いて

$$\|z(t)\| \leq H\|z(0)\|e^{-\lambda t}$$

であるから $H\|z(0)\|$ のかわりに $\zeta(\|z(0)\|)$ を用いたものと考えることができる．

ここで符号関数と飽和関数を

$$\mathrm{sat}(x, K) = \begin{cases} x, & |x| < K \\ K, & x > K \\ -K, & x < -K \end{cases}$$

$$\mathrm{sgn}(x) := \begin{cases} 1, & (x \geq 0) \\ -1, & (x < 0) \end{cases}$$

と定義しておく．

設計手順

v_1 に対する制御則

1. 定数 $T > 0$ を任意の時間周期とし，初期時刻 t_0 と整数 $\forall i \in \{1, 2, \cdots\}$ に対し $t_i := iT$ とする．

2. $k(\cdot) : \Re^n \to \Re : z \mapsto k(z)$ を以下を満たすように選ぶ; すなわちある定数 $\exists K > 0$ が存在して
$$z \in \Re^n \Rightarrow |k(z)| \leq K,$$
$$z = 0 \Leftrightarrow k(z) = 0.$$

3. 周期 T の時間関数 $f(\cdot) : \Re_+ \to \Re : t \mapsto f(t)$ を以下を満たすように選ぶ．

   P1) $[t_0, +\infty)$ で無限回連続微分可能．

   P2) $0 \leq f(t) \leq 1, \quad \forall t \geq t_0$.

   P3) $\forall i \in \{0, 1, \cdots\}$ に対し $f(t_i) = 0$.

   P4) $\forall j \in \{3, \cdots, n\}$ に対し定数 $\eta_j > 0, P_j > 0$ が存在して, $\forall p \in \{0, 1, \cdots\}, \forall t \geq t_p$ に対し
$$\left| \int_{t_p}^{t} [f^{2j-3}(\tau) - \eta_j] d\tau \right| \leq P_j.$$

4. 以上を用いて,
$$v_1 = k(z(t_i)) f(t), \quad t \in [t_i, t_{i+1}) \tag{43}$$
とする．

Sordalen はこのような $k(z)$, $f(t)$ の候補として
$$f(t) = \frac{(1 - \cos \omega t)}{2}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \tag{44}$$
$$k(z) = \mathrm{sat}(-[z_1 + \mathrm{sgn}(z_1) G(\|z\|_1)]\beta, K), \tag{45}$$
を与えている．ここで
$$G(\|z\|_1) = \kappa \|z\|_1^{\frac{1}{2n-4}}$$
$$\beta = \frac{1}{\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(\tau) d\tau}$$
であり，κ は正定数である．また，$\|\cdot\|_1$ は 1-norm の記号で
$$\|z\| := \sum_{j=1}^{n} |z_j|$$
で定義されている．

v_2 に対する制御則

1. 正定数 $\lambda_2, \cdots, \lambda_n$ を任意に選ぶ．

2. 以下のような時間関数の系列 $\{g_{jm}; j, m = 2, \cdots, n\}$ を生成する．
$$\begin{aligned} g_{n-1,n} &= -\lambda_n \\ g_{j-1,m}(t) &= g_{jm}\{\lambda_j f^{2j-2}(t) + 2(j-1)\dot{f}(t)\} \\ &\quad + f(t)\{\dot{g}_{jm}(t) + g_{j,m+1}(t) f(t)\} \\ g_{j-1,j}(t) &= -\lambda_j + f^2(t) g_{j,j+1}(t) \\ g_{jp} &= 0 \quad \text{if } p \leq j \text{ or } p = n+1 \end{aligned}$$

3. 制御則を
$$v_2 = \begin{cases} \Gamma(k(z(t_1)), t)^T Z_2, & z(t_i) \neq 0 \\ 0, & z(t_i) = 0 \end{cases} \tag{46}$$
とする．ただし $1 \times n-1$ の行列値関数 $\Gamma(k,t) = [\Gamma_2(k,t), \cdots, \Gamma_n(k,t)]$ は
$$\Gamma_2(k,t) = -\lambda_2 + f^3 g_{2,3}$$
$$\Gamma_j(k,t) = f(\lambda_2 f g_{2j} + 2\dot{f} g_{2j} + f \dot{g}_{2j} + f^2 g_{2,j+1}) \frac{1}{k^{j-2}}$$
で与える (f および g_{jm} の引数 t は繁雑さを避けるために省略した)．

プロパティ

1. 基本的な方針は以下の通りである．v_1 を時間のみの関数としたとき (状態をフィードバックしないとき)，残りの Z_2 の部分のダイナミクスは線形時不変となり，$v_1 \neq 0$ ならば可制御である．そこでまず v_1 を周期関数 $f(t)$ とし，Z_2 の部分を時変の線形状態フィードバック $v_2 = \Gamma(t) Z_2$ によって安定化しておく．

2. 次に z_1 を収束させるために，1 周期ごとに v_1 の振幅を状態の関数 $k(z(t_i))$ として変化させる．ただし 1 周期の間は v_1 の振幅は変化しないのでやはり時間のみの関数であり，前項と同様に，Z_2 の部分を安定化する線形状態フィードバック $\Gamma(t)$ を 1 周期ごとに求め直すことができる．

3. 設計パラメータは，Z_2 部分の収束速度を指定する $\lambda_2, \cdots, \lambda_n$，$v_1$ の上限 K，周期関数 $f(t)$，$k(z(t_i))$ の中の z にかかるフィードバック係数 κ である．

車両系への適用

v_1 に対する制御則

1. Periodic generator として
$$f(t) = \frac{1 - \cos t}{2} \tag{47}$$

2. Gain function として
$$k(z) = \mathrm{sat}(-[z_1 + \mathrm{sgn}\, z_1 G(\|z\|)]\beta, K) \tag{48}$$
を選ぶ．ここで K は正定数．

v_2 に対する制御則

1. 極配置 ここでは簡単のため，
$$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \tag{49}$$
とする．

2. g-系列の生成
$$g_{2,3} = -\lambda \tag{50}$$
これによりフィードバック行列
$$\Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma_2 & \Gamma_3 \end{bmatrix} \tag{51}$$

ただし

$$\begin{aligned}\Gamma_2 &= -\lambda + f(t)^3 g_{2,3} \\ &= -\lambda + f(t)^3 \cdot (-\lambda) \\ &= -\lambda(1+f(t)^3)\end{aligned} \tag{52}$$

$$\Gamma_3 = \frac{f(t)}{k(z)}(-\lambda^2 f(t) - 2\lambda \dot{f}(t)) \tag{53}$$

3. 以上より

$$v_2 = \Gamma(k(z(t_i)), t) Z_2 \tag{54}$$

を与える．

以上をまとめると最終的なフィードバック則として

$$v_1 = k(z(iT))h(t), \quad t \in [iT, (i+1)T) \tag{55-a}$$

$$\begin{aligned} v_2 &= -(\lambda_1 + \lambda_2 h(t)^3) z_2 \\ &\quad + \frac{h(t)}{k(z(iT))}(-\lambda_1\lambda_2 h(t) - 2\lambda_2 \dot{h}(t)) z_3 \end{aligned} \tag{55-b}$$

を得る．

$$\Gamma_2 = -\lambda_2 - \lambda_3 h(t)^3 \tag{56}$$

$$\Gamma_3 = \frac{h(t)}{k(z)}(-\lambda_2\lambda_3 h(t) - 2\lambda_3 \dot{h}(t)) \tag{57}$$

ただし，

$$h(t) = \frac{1-\cos(2\pi t/T)}{2},$$

$$k(z) = \mathrm{sat}(-2[z_1 + \mathrm{sgn}\, z_1 G(z)]/T, K)$$

$$G(z) = \kappa(|z_1| + |z_2| + |z_3|)^{\frac{1}{2}}$$

ここで，正の定数 $T, K, \kappa, \lambda_1, \lambda_2$ が設計パラメータとなる．

このコントローラで，v_1 は z_1（車両系では x 座標）の制御に用いられている．いま $k(z)$ の $G(z)$ の部分を無視すれば，v_1 は $h(t) \geq 0$ のホールダを用いて周期 T のサンプル値制御系で z_1 が 0 になるように制御している）．ただし，$k(z)$ の中の $G(z)$（z の大きさの情報）の効果により，$G(z)$ が大きい場合には v_1 に大きな入力が入り，z_1 を大きく動かすことになる．つまり，v_1 のコントロールは z_1（車両系では x）を 0 に収束させることを目標にしつつ，z が原点から離れている場合には z_1 を大きく振動させる（車両を x 軸方向に大きく振動させる）役割を果たしている．これは時間軸状態制御形において車両を x 軸方向に繰り返し前進・後退をさせることに相当する．

v_2 は基本的には z_2, z_3 のフィードバックであり，λ_1, λ_2 がその収束性を決定している．さらに z_2, z_3 のフィードバックの係数は v_1 の情報 $h(t)$, $k(z(iT))$ により変化している．これは時間軸状態制御形で車両が前進するときと後退するときで状態制御部（z_2 と z_3）の制御を切り替えるのと対応するのみでなく，前進・後退の切り返し時にも z 全体の大きさが K 指数安定条件を満たすように制御系の構造を変えることを意味している．

4.3.2 Samson の漸近安定コントローラ

Samson[14] は chained form を線形座標変換によって Skew-symmetric chained form と呼ばれる形に変形して，次のような漸近安定性を保証するコントローラを設計した．

$$\|z(t)\| \leq H\|z(0)\|e(t)$$

ここで H は正定数，$e(t)$ は 0 に収束する有界なある関数である．

設計手順

1. Skew-symmetric chained form への変換

$$\begin{aligned}\chi_1 &= z_1 \\ \chi_2 &= z_n \\ \chi_3 &= z_{n-1} \\ \chi_4 &= k_1 z_2 + L_{g_1} z_3 \\ &\vdots \\ \chi_{j+3} &= k_j z_{j+1} + L_{g_1} z_{j+2} \\ &\vdots \end{aligned} \tag{58}$$

ただし $j = 1, \cdots, n-3$. 実はこの変換は線形である．χ 座標系でのダイナミクスは

$$\begin{aligned}\dot{\chi}_1 &= v_1 \\ \dot{\chi}_2 &= v_2 \\ \dot{\chi}_3 &= -k_1\chi_2 v_1 + \chi_4 v_1 \\ &\vdots \\ \dot{\chi}_{j+3} &= -k_{j+1}\chi_{j+2}v_1 + \chi_{j+4}v_1, \quad j = 0, \cdots, n-4 \\ &\vdots \\ \dot{\chi}_n &= -k_{n-2}\chi_{n-1}v_1 \end{aligned} \tag{59}$$

となる．

2. 入力変換 $v_2 = -(k_{n-2}\chi_{n-1} + L_{g_1}\chi_n)v_1 + w_2$ により，$\dot{\chi}_n$ の表現を

$$\dot{\chi}_n = -k_{n-2}\chi_{n-1}v_1 + w_2 \tag{60}$$

とあらためる．今後は v_1 および w_2 に対する制御則を求めることになる．

3. v_1 に対する制御則

$$v_1 = -k_{v_1}\chi_1 + h(\chi_2, \cdots, \chi_n, t) \tag{61}$$

ただし $k_{v_1} > 0$ は定数であり，$h(\cdot)$ は $h(0, \cdots, 0, t) = 0$ をみたし，その時間微分が一様有界な時変の関数である．

4. w_2 に対する制御則

$$w_2 = -k_{w_2}|v_1|\chi_n \tag{62}$$

ただし $k_{w_2} > 0$ は定数.

プロパティ

1. 大域的漸近安定性を与える (指数安定ではない). $f(t)$ を 0 に収束する有界な関数，K を正定数として，

$$\|z(t)\| \leq K\|z(0)\|f(t)$$

が保証される．

2. コンセプトは $\xi_1 = \chi_1$ を時変の関数 h によって振らせながら収束させ，その間に Z_2 の部分を原点に収束させることである．

車両系への適用

1. Skew-symmetric chained form への変換

$$\begin{aligned} \chi_1 &= z_1 \\ \chi_2 &= z_3 \\ \chi_3 &= z_2 \end{aligned} \qquad (63)$$

$n=3$ の場合，z_2 と z_3 が入れ替わるだけである．

2. 入力変換

$$v_2 = -k_1\chi_2 v_1 + w_2$$

よって

$$\dot{\chi}_3 = -k_1 z_2 v_1 + w_2$$

3. 制御則

$$\begin{aligned} v_1 &= -k_{v_1} z_1 + h(Z_2, t) & (64\text{-a}) \\ w_2 &= k_{w_2} v_1 \chi_3 & (64\text{-b}) \end{aligned}$$

これを車両に適用すると以下のようになる．

$$\begin{aligned} v_1 &= -k_{v_1} z_1 + (z_2^2 + z_3^2)\sin(2\pi t/T) & (65\text{-a}) \\ v_2 &= -k_1 z_3 v_1 - k_{w_2} z_2 |v_1| & (65\text{-b}) \end{aligned}$$

ただし $T > 0$, $k_1 > 0, k_{v_1} > 0, k_{w_2} > 0$ が設計パラメータとなる．

ここで v_1 の第 1 項 $-k_{v_1} z_1$ は z_1 を 0 に収束させる入力であり，第 2 項 $(z_2^2 + z_3^2)\sin(2\pi t/T)$ は z_2, z_3 の大きさにより z_1（車両系では x）を振動させる（車両を前後に動かす）入力である．

また，v_2 は基本的には時間軸状態制御形における状態制御部の制御 (42) と同じ形のフィードバックで，z_1（車両では x）が動いている間に z_2, z_3 を制御していることになる．ただし，時間軸状態制御形と異なることは z_1 の方向を切り替える（車両の進行方向を切り返す）点においても先の漸近安定の式が成り立つようにフィードバック係数 k を与える方法を Skew-symmetric chained form を用いてシステマティックに与えている点である（この相違点は特に高次の系で顕著になる）．

4.3.3 Pomet の時変リヤプノフ関数を用いた安定器

Pomet[10] は時変のリヤプノフ関数を用いる方法を提案した．

Pomet[10] による (文献では drift-free system 一般が扱われているが，以下に示すのは chained system に限って適用したケースである)．Time-varying Controller を systematic に与える．

設計手順

1. 周期 T の時変な関数 $h(t, z_1, z_3, \cdots, z_n)$ を

$$h(t, 0) = 0$$

を満たすように選ぶ．

2.

$$\begin{aligned} V(t,z) \,=\, & \frac{1}{2}z_1^2 + \frac{1}{2}(z_2 + h(t, z_1, z_3, \cdots, z_n)) \\ & + \frac{1}{2}z_3^2 + \cdots + \frac{1}{2}z_n^2 \end{aligned} \qquad (66)$$

$$\alpha(t,z) = \frac{\partial h}{\partial t}(t, z_1, z_3, \cdots, z_n) \qquad (67)$$

とし，制御則

$$\begin{aligned} v_1 &= -L_{g_1} V & (68\text{-a}) \\ v_2 &= \alpha(t,z) - L_{g_2} V & (68\text{-b}) \end{aligned}$$

を与える．ただし $L_{g_i} V$ はスカラ値関数 V のベクトル場 g_i に沿った Lie 微分を表し，

$$L_{g_i} V = \frac{\partial V}{\partial z} g_i$$

で定義される．

プロパティ

1. 大域的一様漸近安定性を保証する．

2. 制御即の導出は，リャプノフ関数 (66) の微分を負定にするように直接決定する．

車両系への適用　周期関数として

$$h(t, z_1, z_3, \cdots, z_n) = z_2 \cos t$$

を選ぶと，$\alpha(t,z) = -z_2 \sin t$ であって，リヤプノフ関数の候補として

$$V(t,z) = \frac{1}{2}z_1^2 + \frac{1}{2}(z_2 + z_3\cos t)^2 + \frac{1}{2}z_3^2 \qquad (69)$$

を用いることができる．これに基づき，V の時間微分を負とするフィードバックとして

$$\begin{aligned} v_1 &= -(z_2 + z_3\cos t) z_2 \cos t - (z_2 z_3 + z_1) & (70\text{-a}) \\ v_2 &= z_3 \sin t - (z_2 + z_3 \cos t) & (70\text{-b}) \end{aligned}$$

を得る．

(69) を 0 に収束させるというコンセプトからもわかるように，この手法で振動させるものは基本的には z_2 であり，先の Sordalen や Samson の制御系とは根本的に振る舞いが異なる．

4.4 不連続フィードバックを用いた制御

非ホロノミック系を安定化するためには時変なフィードバックを使う以外に不連続なフィードバック（状態の一部でフィードバック則が定義されない）を用いる方法がある．ここでは不連続フィードバックの代表例を車両に応用したものを示す．

4.4.1 疑似連続指数安定器

Khennouf and Canudas de Wit [5][6][16] は $z_1 = z_2 = 0$ 以外で連続なフィードバックで指数安定化を実現する方法を提案している．車両系の場合には

$$V(z) = z_1^2 + z_2^2 \tag{71-a}$$
$$s(z) = z_3 - \frac{1}{2}z_1 z_2 \tag{71-b}$$

と定義し，$\sigma > 2\kappa$ を満たす正定数 κ, σ を用いて，制御則が

$$v_1 = -\kappa z_1 - \sigma\frac{s(z)z_2}{V(z)} \tag{72-a}$$
$$v_2 = -\kappa z_2 + \sigma\frac{s(z)z_1}{V(z)} \tag{72-b}$$

で与えられる．

制御則 (72) の第一項は $V(z)$ を 0 に収束させる連続フィードバックの部分であって，κ はそのレートを決める．一方，第二項は $s(z)$ を収束させる不連続フィードバックの部分であって，σ がそのレートを決める．不連続となる状態の集合は $\{z : V(z) = 0\}$ すなわち $z_1 = z_2 = 0$ であるが，初期値が $V(z(0)) = 0$ でさえなければ理想的にはこの集合を横切ることはなく，また条件 $\sigma > 2\kappa$ が満たされていれば入力も指数的に収束することが示されている．

設計手順　$n = 3$ の場合に限って述べる．次のスカラ値関数

$$V(z) = z_1^2 + z_2^2 \tag{73-a}$$
$$s(z) = z_3 - \frac{1}{2}z_1 z_2 \tag{73-b}$$

を定義し，$\sigma > 2\kappa$ を満たす正定数 κ, σ を用いて，制御則を

$$v_1 = -\kappa z_1 - \sigma\frac{s(z)z_2}{V(z)} \tag{74-a}$$
$$v_2 = -\kappa z_2 + \sigma\frac{s(z)z_1}{V(z)} \tag{74-b}$$

と与える．

プロパティ　大域的指数安定性．これは $s(z), V(z)$ がともに 0 へ収束すると示すことによって証明されている．制御則 (74) の第一項は $V(z)$ を 0 に収束させる連続フィードバックの部分であって，κ はそのレートを決める．一方第二項は $s(z)$ を収束させる不連続フィードバックの部分であって，σ がそのレートを決める．不連続となる状態の集合は $\{z; V(z) = 0\}$ すなわち $z_1 = z_2 = 0$ であるが，初期値が $V(z(0)) = 0$ でさえなければ理想的にはこの集合を横切ることはなく，また条件 $\sigma > 2\kappa$ が満たされていれば入力も指数的に収束することが示せるので，同文献ではこれを疑似連続 (Quasi-continuous) フィードバックと呼んでいる．

4.4.2 Astolfi の不連続指数安定器

Astolfi [1][2] は $z_1 = 0$ を除いた状態で指数安定を保証するフィードバックを設計した．

これを車両系に応用すると以下のようになる．

$$v_1 = -kz_1 \tag{75-a}$$
$$v_2 = F_2 z_2 + F_3\frac{z_3}{z_1} \tag{75-b}$$

ただし，$k > 0$ は z_1 の 0 への収束速度を決定するパラメータ，定数 F_2, F_3 は行列

$$\begin{pmatrix} F_2 & F_3 \\ -k & k \end{pmatrix} \tag{76}$$

の固有値の実部を負とするもので，z_2, z_3 の 0 への収束速度を決定するものである．

この手法は $z_1 = 0$ を初期値とした場合には使用不可能であるので，そのような場合には open-loop などの何らかの手法で初期状態を少しずらすことが提案されている．

設計手順

1. σ-process と呼ばれる以下の不連続な座標変換を行なう．

$$\chi = [\,\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_n\,],$$

$$\begin{bmatrix} \chi_1 = & z_1 \\ \chi_2 = & z_2 \\ \chi_3 = & \dfrac{z_3}{z_1} \\ \vdots & \\ \chi_n = & \dfrac{z_n}{z_1^{n-2}} \end{bmatrix} \tag{77}$$

χ 座標系でのダイナミクスは

$$\begin{aligned} \dot{\chi}_1 &= v_1 \\ \dot{\chi}_2 &= v_2 \\ \dot{\chi}_3 &= \frac{\chi_2 - \chi_3}{\chi_1}v_1 \\ &\vdots \\ \dot{\chi}_n &= \frac{\chi_{n-1} - (n-2)\chi_n}{\chi_1}v_1 \end{aligned} \tag{78}$$

となる．

2. $k > 0$ を定数として $v_1 = -k\chi_1$ を与える．すると線形な閉ループ系

$$\dot{\chi} = A\chi + bv_2 \tag{79}$$

$$A = \begin{bmatrix} -k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k & -k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k & -k \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

を得る．

3. (79) を安定化する線形フィードバック

$$v_2 = FZ_2 \tag{80}$$

を求める．

プロパティ　この制御則が保証するのは Almost exponential stability, すなわち $z_1(0)=0$ を除いた初期状態からの指数安定性である．

この手法のポイントは，σ-process と呼ばれる不連続な座標変換を用いることにより，$v_1=-k\chi_1=-kz_1$ としたときに Z_2 に対応するパートが線形時不変に見えるように表現していることである．時間軸状態制御形を用いた手法が等価的に $v_1=const.$ としたときに線形時不変に見えるように表現していることと対照されたい．

$z_1(0)=0$ となっている場合は open-loop などの何らかの手法で初期状態を少しずらすことを提案している．

車両系への適用

$$\chi=\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \frac{z_3}{z_1}\end{bmatrix} \tag{81}$$

$$\begin{aligned} v_1 &= -k\chi_1 & \text{(82-a)}\\ v_2 &= F\begin{bmatrix}\chi_2 & \chi_3\end{bmatrix} & \text{(82-b)}\end{aligned}$$

4.4.3　成清らの不連続指数安定器

成清ら [22] は Astolfi とは別の方法で不連続な指数安定フィードバックを設計している．これも $z_1=0$ を除く状態でシステムの指数安定化を可能とする．

この方法を車両系に応用すると以下になる．

$$\begin{aligned} v_1 &= -\lambda z_1 & \text{(83-a)}\\ v_2 &= -\lambda z_2+\alpha z_1 & \text{(83-b)}\end{aligned}$$

ここで λ は原点への収束速度を決める設計パラメータであり，α は

$$\alpha=\frac{2\lambda}{z_1}\left(\frac{2z_3}{z_1}-z_2\right) \tag{84}$$

と定義されている．この値は理想状態（外乱やパラメータ誤差がない場合）には制御中は一定値となる（つまり，初期値 $z(0)$ のみに依存する）．しかし，この α を初期値 $z(0)$ を用いて計算し，制御中は一定値であると仮定して制御をすると，z_3 をフィードバックする部分がなくなるため，現実的には α を計算しながら制御することになる（次節のシミュレーションで検討しているのは α 固定の場合の応答である）．車両系では α を v_2 の式に代入すると Astolfi のコントローラーと同じ形になるが，元々の設計手法が異なるため，高次のシステムでは両者は一致するとは限らない．

設計手順

$$\begin{aligned} v_1 &= -\lambda z_1 & \text{(85-a)}\\ v_2 &= -\lambda z_2+\alpha \hat{z}_1 & \text{(85-b)}\end{aligned}$$

ただし $\lambda>0$ は定数，

$$\hat{z}_1=\begin{bmatrix} z_1 & z_1^2 & \cdots & z_1^{n-2}\end{bmatrix}^T$$

であり，$\alpha\in\Re^{1\times n-2}$ は以下のようにして求める．$i=1,\cdots,n-2$ および $j=2,\cdots,n-2$ に対し

$$\begin{aligned}
\chi_i &= z_{i+2}-\frac{1}{i+1)!}z_1^i z_2\\
\chi(z) &:= \begin{bmatrix}\chi_1 & \cdots & \chi_{n-2}\end{bmatrix}^T\\
A_{i,1}(z_1) &= \frac{1}{(i+1)!}\sum_{k=2}^{i+1}\frac{1}{k}z_1^{i+1}\\
A_{i,j}(z_1) &= \frac{1}{(j-1)!}\left\{\frac{1}{(i+1)!}-\frac{j!}{(i+j)!}\right\}z_1^{i+j}\\
A(z_1) &:= \begin{bmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,n-2}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ A_{n-2,1} & \cdots & A_{n-2,n-2}\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

を定義し，

$$\alpha(z)=\lambda A(z_1)^{-1}\chi(z) \tag{86}$$

によって与える．このように α は z を引数とした $\Re^{1\times n-2}$ 値の関数になるが，文献 [22] によれば状態フィードバック (85) の下で $\dot{\alpha}(z(t))=0$ ，すなわち α は初期状態によって定まる一定値をとる．したがって定ベクトル $\alpha=\alpha(z(0))$ を与えれば良い．

プロパティ　初期状態として $z_1(0)=0$ を除いた時の原点の指数安定性．また，このとき静的状態フィードバックは滑らかである．

車両系への適用　$n=3$ の場合，q, A および α はすべてスカラとなる．

$$q=z_3-\frac{1}{2}z_1z_2$$

$$A=\frac{1}{4}\cdot z_1^2$$

$$\alpha=\lambda A^{-1}q=\frac{2\lambda}{z_1}\left(\frac{2z_3}{z_1}-z_2\right)$$

よって

$$\begin{aligned} v_1 &= -\lambda z_1\\ v_2 &= -\lambda z_2+\alpha z_1\end{aligned}$$

考察　同文献では $A(z_1)\dot{\alpha}=0$ を示すことにより $\dot{\alpha}=0$ を主張しているが，ここでは当然 $A(z_1)$ の正則性が必要である．制御則 (85) を適用すれば λ が正の実数であるため z_1 は符号を変えることなく 0 に収束するから，$\det A(z_1)$ もまた同様である．ゆえに $\dot{\alpha}=0$ すなわち $\alpha(z(t))=\alpha(z(0))$ はきわめて不安定である．(86) 式もまた $A(z_1)^{-1}$ を含むのでオンタイムで α を更新することも適当でない．

4.5　その他の方法

時変フィードバックであるが，不連続フィードバックの欠点を時変フィードバックで補った方法として井村・小林・吉川の方法が知られている．

4.5.1 井村・小林・吉川の指数安定器

これまでに述べた各制御則の特性を z_1 の切り返しという面から観察すると，4.2 節の時間軸状態制御形では有限回, 4.3 節の時変フィードバックでは原則として無限回，4.4 節の不連続フィードバックでは 0 回である．これに対し井村, 小林, 吉川 [4] は予め与えた目標軌道に状態を追従させ，過渡応答（切り返し回数）を陽に指定する方法を提案した．以下では簡単のため $z_1(t)$ のみに目標軌道を与えたもの [17] を示すが，これにより 4.4 節の不連続フィードバックでは除外されていた初期値 ($z_1 = 0$) も扱えるようになっている．

車両系に応用すると制御則は次のようになる．

$$v_1 = -kd(t) - F_1(z_1 - d(t)) \quad (87\text{-a})$$

$$v_2 = F_2(t)z_2 + F_3(t)\frac{z_3}{d(t)} \quad (87\text{-b})$$

ただし $F_1 > k > 0$ ，また $d(t)$ は z_1 に対して与える目標軌道であり，時間関数

$$d(t) = \iota(z(0))e^{-kt} \quad (88)$$

である．ここで $z_1 = 0$ や $|z_1(0)|$ が小さい場合でも $\iota(z(0))$ が大きくなるように $\iota(\cdot)$ を選べば，z_1 の目標値 d が 0 から離れるため制御中に z_1 もいったん $z_1 = 0$ から十分遠ざかり，改めて 0 に収束することになる．

k は目標値 d の原点への収束速度を規定し，F_1 は z_1 の d への収束速度を規定している．また，v_2 の式は第 2 項の分母が z_1 ではなく $d(t)$ となっていること，$F_2(t), F_3(t)$ に時変なものを許していることが Astolfi の制御則と異なる点である．

このように z_1 に時変の目標値 $d(t)$ を導入することにより，この制御則は不連続ではない（すべての状態を初期値として安定化できる）時変のフィードバックになっている．

設計手順

$$v_1 = -kd(t) - F_1(z_1 - d(t)) \quad (89\text{-a})$$

$$v_2 = -F_2(t)z_2 + F_3(t)\frac{z_3}{d(t)} + \cdots \cdots + F_n(t)\frac{z_n}{d(t)^{n-2}} \quad (89\text{-b})$$

ただし $F_1 > k > 0$ ，また $d(t)$ は z_1 に対して与える目標軌道であり，時間関数

$$d(t) = h(z(0))e^{-kt} \quad (90)$$

である．またフィードバック係数 $F(t) = [F_2, \cdots, F_n](t)$ は前節の Astolfi による設計法で求めた F に指数的に収束するように選ぶ．

プロパティ　指数安定性.

$$\exists\alpha > 0, \quad \|z(t)\| \leq k(z(0))e^{-\alpha t}$$

本質的に Astolfi の制御則と一致するが，相違点は z_1 を単に指数収束させるのでなく，指数収束する軌道 $d(t)$ に追従させること，およびフィードバック係数 $F(t)$ として時変なものを許していることである．$z(0) \neq 0$ であれば $d(0) \neq 0$ になるため， 初期状態の特異点 $z_1(0)$ を自動的に離れることができる．$F_1 > k$ の条件は目標軌道への追従を目標軌道自身の収束よりも速くするためである．

5 シミュレーションによる各フィードバックの比較

前節で列挙したフィードバックの特徴を比べるためにシミュレーションによる比較を行おう．ここでは科学技術計算プログラミング言語 MATX[18] 上で Runge-Kutta 法を用いた．シミュレーション自体は連続時間モデルで行なったが，各制御則の計算は 10 [msec] ごとに行ない，その間は 0 次ホールドとした．

Fig. 2 は理想状態（誤差・雑音がない場合）の各制御系の応答を示している．

Fig. 3 はパラメータ誤差として右の車輪の半径が設計値より 50%大きいときの各制御系の応答を示している．この場合は車両系を chained form に変換する時のパラメータに誤差があり，厳密には chained form に変換されていないシステムを chained form に変換されていると仮定して制御したことに相当する．

Fig. 4 は観測雑音として x, y, θ の測定に平均 0 の高周波雑音がのっている場合の各制御系の応答を示している．

これらの結果から，以下のような考察が得られる．

- パラメータ誤差があると Sordalen の方法では収束が極端に遅くなり，原点から離れたところで振動を始める．Samson の方法と時間軸状態制御形でも y 座標に定常偏差を生じ，原点から離れたところで振動を始める．車輪半径のパラメータ誤差を含んだままシステムを chained form に変換するとパラメータ誤差は chained form に対する外乱として作用するため，基本的にはある種の定常的な偏差が残る．しかし不連続フィードバックは基本的に原点近傍でハイゲインになっているので，偏差を残さない．

- 観測雑音に対しては，Sordalen, Samson の方法と時間軸状態制御形の応答はほとんど影響を受けていない（雑音のため原点付近で x 軸に沿って往復運動をするが，これは適当なところで車両を停止させればよい）．一方 Astolfi, 井村らの方法は原点近傍でハイゲインになっているので，雑音を増幅して車両が暴れてしまう．Khennouf and Canudas de Wit の方法は応答は暴れないが定常偏差が残ってしまっている．

- Pomet の方法は理想状態のもとでの挙動が他の手法によるものと大きく異なっている．θ を振動させることがベースになっているため，円弧状の軌跡を描きながら徐々に原点に接近していくという，車両の運動としてはやや不自然な挙動を示す．しかしながら本手法では閉ループ系の漸近安定性が強固に保証されており，パラメータ誤差および観測雑音の双方に対してほとんど影響を受けない．

- 時間軸状態制御形の場合にはここで考えたパラメータ誤差が状態制御部 (38-a) に対する一定値外乱として作用することがわかっているので，状態制御部にサーボ系を設計する（積分器を導入する）ことによりパラメータ誤差の影響を低減することが可能となる．

  例えば右の車輪の半径 R_r が ΔR_r に変動したとすると，それは状態制御部 (38-a) において次のように現れ

てくる．

$$\frac{d}{dz_1}\begin{pmatrix} z_3 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1+\Delta}{2}\mu_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1-\Delta}{2} \end{pmatrix} \tag{91}$$

このとき，次のようにして状態制御部に対するフィードバック則 (39)(41) に積分器を付加する．

$$\mu_2 = -k_2 z_2 - k_3 z_3 + K\int z_2 dz_1 \quad (z_1 \text{ 増加時}) \tag{92}$$

$$\mu_2 = k_2 z_2 - k_3 z_3 + K\int z_2 dz_1 \quad (z_1 \text{ 減少時}) \tag{93}$$

Fig. 2-i, Fig. 3-i, Fig. 4-i にこの制御則を適用したときのシミュレーション結果を示す．特に Fig. 3-a と Fig. 3-i を比較すると，積分器の導入によりパラメータ誤差の影響によって生じる定常偏差がが低減されていることがわかる．

本質的に，時間軸状態制御形はその構造の簡単さ（状態制御部 (38-a) が線形システム，または線形に近い非線形システムとなっていること）から，今まで線形システムに対して開発されている制御則（たとえば適応制御 [9]，ロバスト制御）を容易に取り込める利点がある．しかし，全体の指数安定性等は保証していない．

- 成清らの方法は α を一定と仮定することによりオープンループ的要素を残しているため，不連続フィードバックでありながら時変フィードバックと類似した特性を示す．すなわち，パラメータ誤差に対しては定常偏差を残すが，観測雑音に対してはほとんど影響を受けず良好に原点に収束する．

このように，今まで提案されている制御系はいずれも長所と短所を併せ持っている．これを次表に要約しておこう．

Table 1: 各制御則の特性比較

	理想状態の応答	パラメータ誤差	観測雑音	拡張の容易さ †	安定性の保証
時間軸状態制御形	○	△ *	○	◎	×
Sordalen	○	×	○	×	$\mathcal{K}$ 指数安定
Samson	○	×	○	?	漸近安定
Pomet	△	○	○	?	漸近安定 (Lyapunov)
Khennouf ら	◎	○	×	×	指数安定 †
Astolfi	◎	○	×	○	指数安定 †
成清ら	◎	×	○	×	指数安定 †
井村ら	◎	○	×	○	$\mathcal{K}$ 指数安定

* そのままでは定常偏差を生じるが，サーボ系に拡張することで改善できる．

† 初期値として測度 0 の集合 $\{z_1 = 0\}$ を除く．

6 おわりに

本解説では chained form または時間軸状態制御形で表される非ホロノミック系に対する安定化フィードバックの設計の問題点を Brocket の定理を用いて説明し，今まで提案されているフィードバック補償器の概説とシミュレーションによる特性比較を行った．なお本解説では紙面の都合上述べなかったが，ここで挙げた非ホロノミック系の制御法の応用実験として，著者らは平面宇宙ロボットの姿勢制御 [13][7][9]，2 板間に挟まれた球体の操り [20][21] などにも時間軸状態制御形を適用し，良好な結果を得ている．

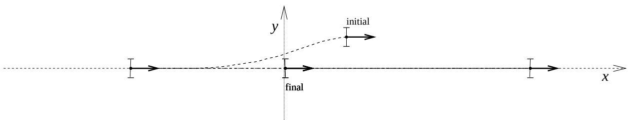

Figure 2-a: 時間軸状態制御形

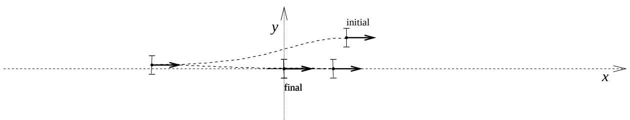

Figure 2-b: Sordalen

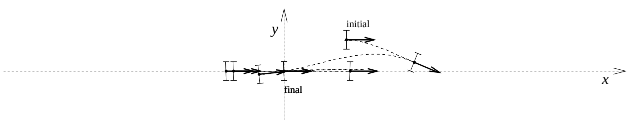

Figure 2-c: Samson

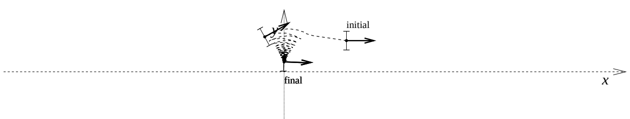

Figure 2-d: Pomet

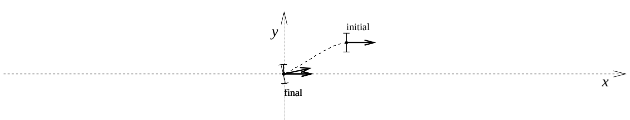

Figure 2-e: Khennouf and Canudas de Wit

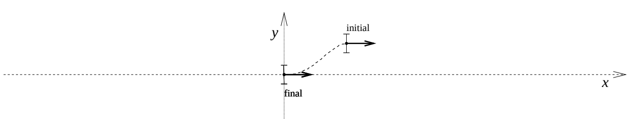

Figure 2-f: Astolfi

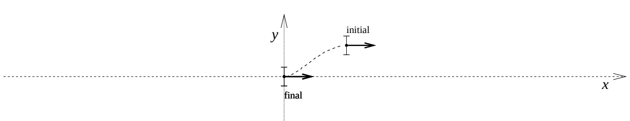

Figure 2-g: 成清ら

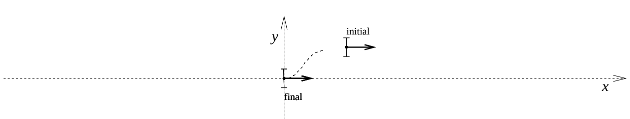

Figure 2-h: 井村，小林，吉川

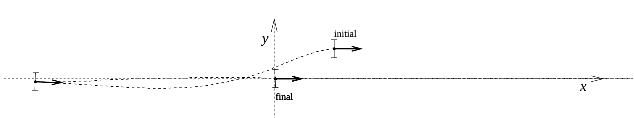

Figure 2-i: 時間軸状態制御形（サーボ系）

Figure 2: 理想状態 (誤差・雑音がない場合)

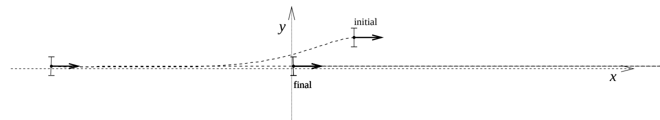

Figure 3-a: 時間軸状態制御形

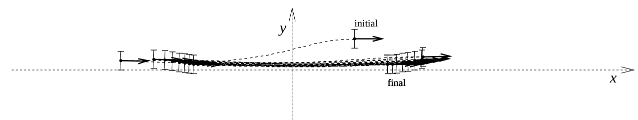

Figure 3-b: Sordalen

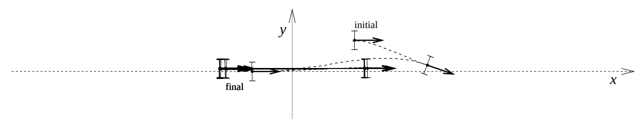

Figure 3-c: Samson

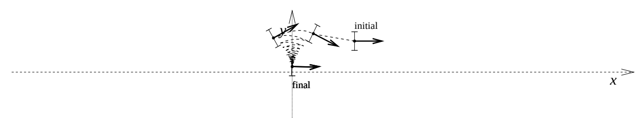

Figure 3-d: Pomet

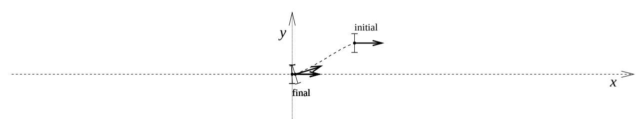

Figure 3-e: Khennouf and Canudas de Wit

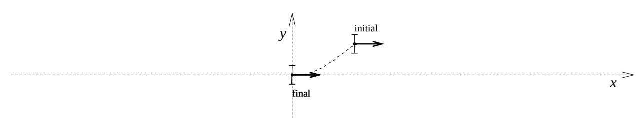

Figure 3-f: Astolfi

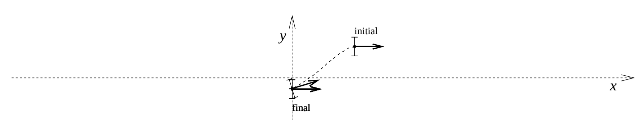

Figure 3-g: 成清ら

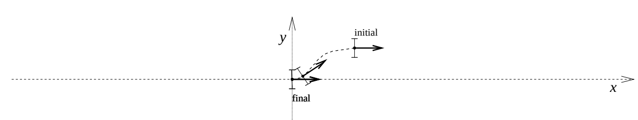

Figure 3-h: 井村，小林，吉川

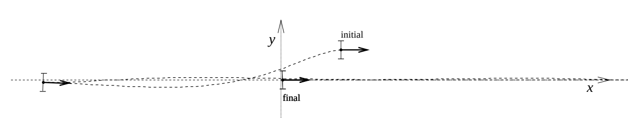

Figure 3-i: 時間軸状態制御形（サーボ系）

Figure 3: パラメータ誤差のある場合

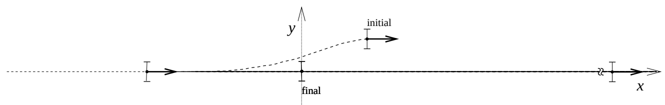

Figure 4-a: 時間軸状態制御形

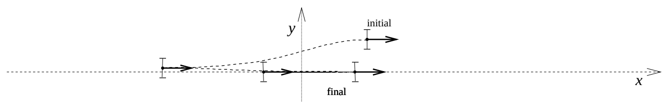

Figure 4-b: Sordalen

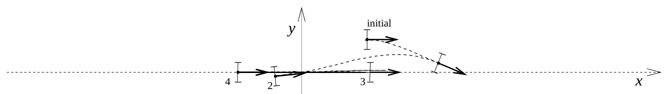

Figure 4-c: Samson

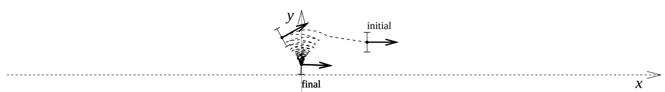

Figure 4-d: Pomet

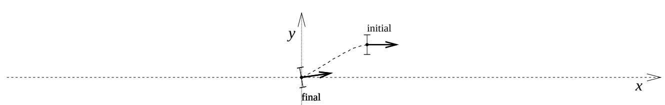

Figure 4-e: Khennouf and Canudas de Wit

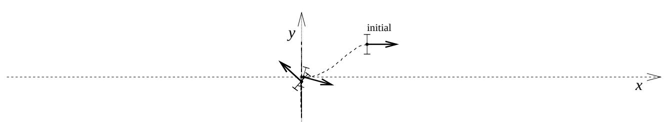

Figure 4-f: Astolfi

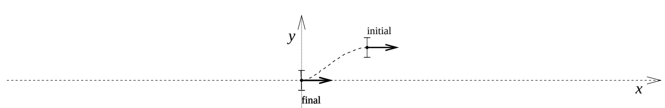

Figure 4-g: 成清ら

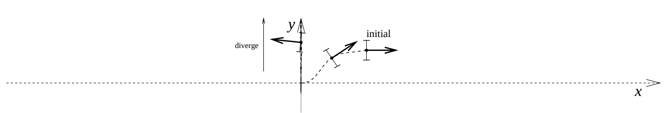

Figure 4-h: 井村，小林，吉川

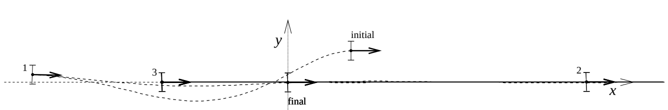

Figure 4-i: 時間軸状態制御形（サーボ系）

Figure 4: 観測雑音のある場合

References

[1] A. Astolfi. Exponential stabilization of a car-like vehicle. In *International Conference on IEEE Robotics and Automation*, pages 1391 – 1396, 1995.

[2] A. Astolfi. Exponential stabilization of nonholonomic systems via discontinuous control. In *Proc. of NOLCOS'95*, pages 741 – 746, 1995.

[3] R.W. Brockett. Asymptotic stability and feedback stabilization. In *Differential Geometric Control Theory*, volume 27, pages 181–191. Springer Verlag, 1983.

[4] J. Imura, K. Kobayashi, and T. Yoshikawa. Exponential stabilization problem of nonholonomic chained system with specified transient response. In *Proc. of the 35th CDC*, pages 4733–4738, 1996.

[5] H. Khennouf and C. Canudas de Wit. On the construction of stabilizing discontinuous controllers for nonholonomic systems. In *Proc. of NOLCOS'95*, pages 747 – 752, 1995.

[6] H. Khennouf and C. Canudas de Wit. Quasi-continuous exponential stabilizers for nonholonomic systems. In *IFAC 13th World Congress*, pages 2b–17 4, San Francisco,USA, 1996. International Federation of Automatic Control.

[7] H. Kiyota and M. Sampei. A control of a class of nonholonomic systems with drift using time-state control form. In *Proc. of the 20th SICE symp. on Dynamical System Theory*, pages 129–132, 1997.

[8] R.M Murray and S.S. Sastry. Nonholonomic motion planning: Steering using sinusoids. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 38(5):700–716, 1993.

[9] T. Nakagawa, H. Kiyota, M. Sampei, and M. Koga. An adaptive control of a nonholonomic space robot. In *Proc. of the 36th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 3632–3633, 1997.

[10] J.-B. Pomet. Explicit design of time-varying stabilizing control laws for a class of controllable systems without drift. *Systems & Control Letters*, 18:147–158, 1992.

[11] M. Sampei. A control strategy for a class fo nonholonomic systems – time-state control form and its application –. In *Proc. of 33rd CDC*, pages 1120 – 1121, 1994.

[12] M. Sampei, H. Kiyota, M. Koga, and M. Suzuki. Necessary and sufficient conditions for transformation of nonholonomic system into time-state control form. In *1996 IEEE Conference on Decision and Control*, pages 4745–4746, 1996.

[13] M. Sampei, H. Kiyota, S. Mizuno, and M. Koga. A control of a class of nonholonomic systems subject to velocity constraints using acceleration inputs. In *AACC Proc. of 1997 American Control Conference*, pages 2301–2302, 1997.

[14] C. Samson. Control of chained systems application to path following and time-varing point-stabilization of mobile robots. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 40(1):64–77, 1995.

[15] O.J. Sordalen and O. Egeland. Exponential stabilization of nonholonomic chained systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 40(1):35–49, 1995.

[16] P. Tsiotras, M. Corless, and J.M. Longuski. Invariant manifold techniques for attitude control of symmetric spacecraft. In *Proc. of 32nd CDC*, 1993.

[17] 吉川, 井村, and 小林. 非ホロノミック・チェインドシステムの有限回の切り返しを持つ指数安定化則. In **第１３回日本ロボット学会学術講演会**, pages 1085–1086, 1995.

[18] 古賀. ロボット工学ソフトウェア利用の手引 (第３回) 科学技術計算プログラミング言語 matx. **日本ロボット学会誌**, 14(6):800–803, 1996.

[19] 荒井. ２階の非ホロノミック系の制御. **計測と制御**, 36(6):404–410, 1997.

[20] 三平, 水野, 石川, and 古賀. ２板間に挟まれて運動する剛球の位置制御. **日本ロボット学会誌**, 14(8):1237–1242, 1996.

[21] 水野, 三平, 古賀, and 石川. 転がりを用いた球体の姿勢制御. **日本ロボット学会誌**, 16(1):118–123, 1 1998.

[22] 成清 and 杉田. Chained form で記述された非ホロノミック系の指数安定化. **計測自動制御学会論文集**, 32(8):1310–1312, 1996.