

状態方程式の厳密な線形化

三平満司 (東京工業大学)

1 はじめに

非線形システム (実システム) に対して線形システム理論を適用するためには, なんらかの方法で非線形システムを線形化し, 線形システムとして扱う必要がある. この線形化の良し悪しが制御の良し悪しを決定してしまうため, 線形化手法が研究されてきた.

ここでは状態フィードバック制御をするための状態方程式の線形化について述べる.

2 線形システムと非線形システム

本解説で扱う非線形システムは次の非線形状態方程式で表わされる 1 入力 n 次のシステムである.

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + g(x)u \quad (1)$$

ここで x は状態で n 次元の縦ベクトル, u はシステムへの入力でスカラーである. また $f(x), g(x)$ は x に関して何回でも偏微分可能な n 次元の縦ベクトル値関数 (ベクトル場) であり, 一般性を失うことなく $f(0) = 0$ と仮定する.

線形システムは $1 + 1 = 2$ の世界であるから, イメージとしては図 1-a に示すような直線と考えることができる. (このとき, 図の縦軸と横軸は抽象的なイメージを表わすもので特別な意味を持っていない) これに対して非線形システムとは線形とは限らない (線形であってもいい) システムの総称であり, 図的イメージとしては図 1-b のような曲線で表わされるものと考えれば良い. イメージとしての非線形システムの線形化問題は図 1-b の曲線を如何に図 1-a の直線に変形するか (または近似するか) という問題である.

3 テーラー展開の 1 次近似線形化

一般に用いられている線形化手法は以下のようなテーラー展開の 1 次近似に基づいたものである. 非線形状態方程式 (1) において $x = 0, u = 0$ が平衡点 ($\frac{dx}{dt} = 0$ となり, 状態 x が変化しない) であることに注意して, この平衡点のまわりで (1) の右辺をテーラー展開し, 1 次の近似を行

なえば次の式を得る.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(0) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=0} x + g(0)u + O^2(x, u) \\ &= \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=0} x + g(0)u + O^2(x, u) \end{aligned} \quad (2)$$

ここで $O^2(x, u)$ は x と u に関して 2 次以上の項を表わす. また $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))^T$ とするとき

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (3)$$

である. $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=0}$ と $g(0)$ は既に定数となっていることから

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=0}, \quad B = g(0) \quad (4)$$

と定義し, また (2) において x と u が十分小さいとして $O^2(x, u)$ の項を無視すれば, テーラー展開の 1 次近似として以下の線形システムを得る.

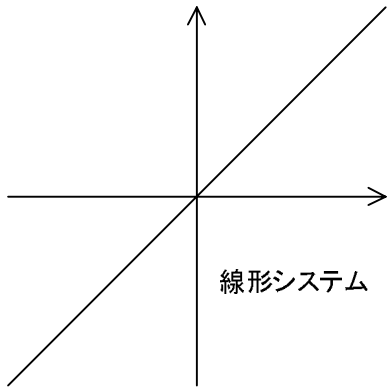
$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu \quad (5)$$

コントローラーの設計はこの近似線形化されたシステムに対して線形制御理論を用いて行えばよい. 例えば状態フィードバックを用いるならば

$$u = Fx \quad (6)$$

となり, コントローラーは線形である.

この線形化のブロック線図は図 2 であらわされ, イメージ的には図 3 に示すように元の曲線 (非線形システム) に対して原点の近くで接線を引き, この接線を近似線形化されたシステムと考えることに相当する. この線形化は原点から離れると近似が悪くなるため原点の近くでしか有効でないことが多いが, 手法が簡潔であり, またほとんどすべてのシステムに対して近似線形システムを与えるので広く用いられている (もちろん, この線形化で十分なシステムもある).



(a) 線形システムのイメージ

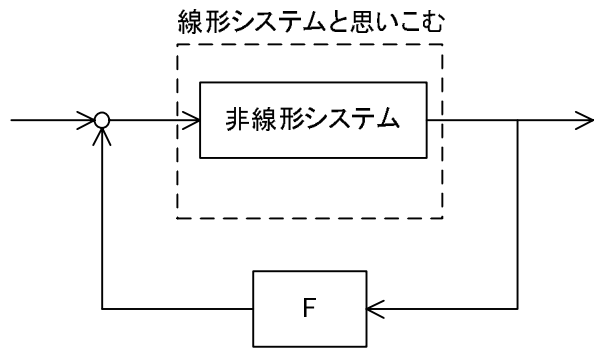
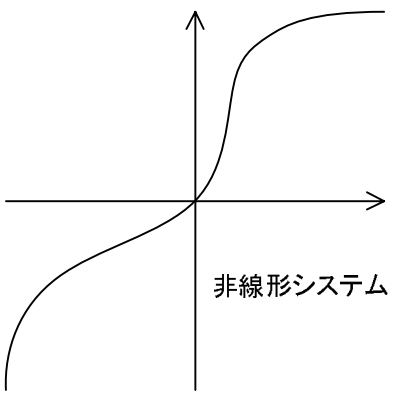


図 2: テーラー展開の1次近似線形化を用いた制御系



(b) 非線形システムのイメージ

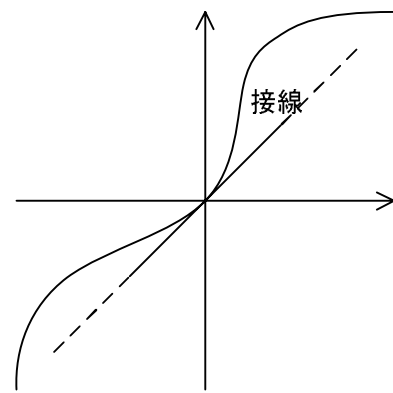


図 3: テーラー展開の1次近似線形化のイメージ

図 1: システムのイメージ

4 非線形フィードバックによる厳密な線形化

前節の線形化は平衡点（ここでは原点）の近くでの近似線形化でしかなく、また近似の精度も必ずしも十分であるとは言えない。そのためロボットのように作業範囲が大きく、かつ非線形性の大きなシステムに対しては利用できないことがある。そのため、ロボット工学の分野ではこれと異なった線形化（近似ではなく厳密な線形化）が行なわれるようになった。

ロボットなどの機械系の場合は運動方程式が特殊な形をしていることが多い。例えば多くのロボットの運動方程式は

$$M(\theta)\ddot{\theta} + k(\theta, \dot{\theta}) = \tau \quad (7)$$

で表わされることが知られている。ここで θ はロボットの姿勢角、 $M(\theta)$ は慣性モーメントを表わす項で θ の関数、 $k(\theta, \dot{\theta})$ は遠心力やコリオリ力を表わす項、 τ は各リンクへのトルク入力である。また、一般に $M(\theta)$ は常に正則である。

さて、 $M(\theta)$ が正則であることから (7) に対してフィードバック

$$\tau = k(\theta, \dot{\theta}) + M(\theta)v \quad (8)$$

を用いる (v は新しい入力) と

$$\ddot{\theta} = v \quad (9)$$

となる、これを状態方程式で表わせば

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} v \quad (10)$$

のように状態を $(\theta^T, \dot{\theta}^T)^T$ 、入力を v とした線形状態方程式となる。この線形化された状態方程式に対して線形制御理論を用いてコントローラーを設計すれば、 θ を容易に制御することができる。

(10) を安定化するコントローラーとして状態フィードバック

$$v = F \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} \quad (11)$$

を用いれば、元のシステム (7) に対するコントローラーは

$$\tau = k(\theta, \dot{\theta}) + M(\theta)F \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} \quad (12)$$

となる。このときのコントローラーは前節と異なり非線形であることに注意する。この制御系の様子を図 4 に示す。この線形化のイメージは図 5 のように元の曲線（非線形

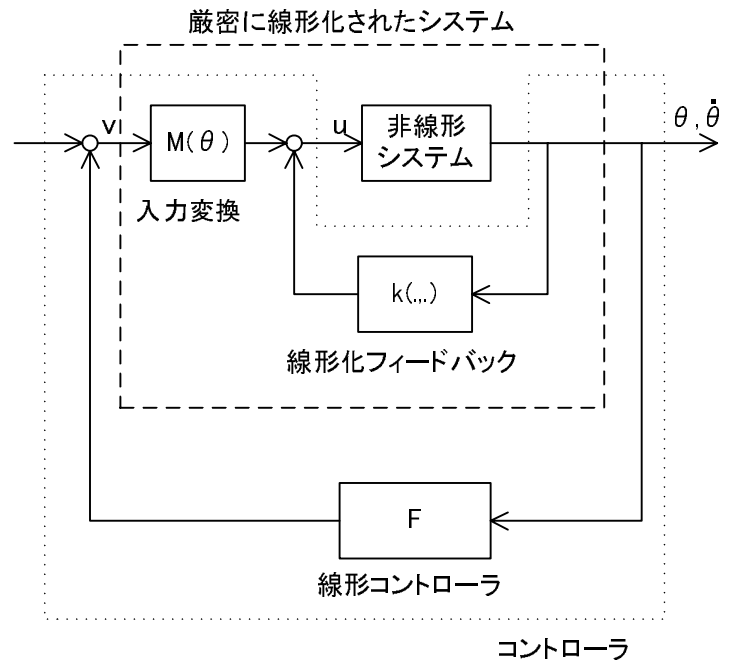


図 4: 非線形フィードバックを用いた線形化を用いた制御系

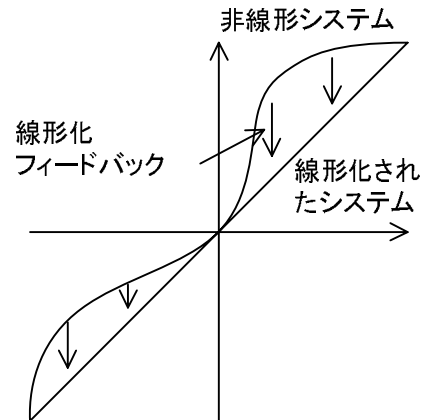


図 5: 非線形フィードバックを用いた線形化のイメージ

システム) を入力を使って強制的に直線（線形システム）にするものである。つまり、状態フィードバックという槌を用いて非線形性を ” たたいて、のぼす ” 線形化と考えることができる。

この線形化は近似を用いない厳密な線形化であるため、線形化されたシステムを用いて設計されたコントローラーは原点の近くのみでなく状態全体で有効となる。しかし、この方法は直感的であるため、ダイナミクスが

$$M(\theta, \dot{\theta}, \dots, \theta^{(r-1)})\theta^{(r)} + k(\theta, \dot{\theta}, \dots, \theta^{(r-1)}) = N(\theta, \dot{\theta}, \dots, \theta^{(r-1)})u \quad (13)$$

で表わされるシステムにしか応用できない（ここで $\theta^{(i)} =$

$\frac{d^i \theta}{dt^i}$ とし, $M(\cdot)$ と $N(\cdot)$ は常に正則とする). しかし, 機械系などのように (13) で表わされるシステムが多いことも事実である.

5 座標変換と非線形フィードバックを用いた厳密な線形化

テーラー展開の1次近似を用いた線形化はシステムの線形近似であり, 狭い範囲でしか有効ではなかった. また非線形フィードバックを用いた線形化は厳密な線形化であるため状態の広い範囲で有効であるが, 特殊な形をしたシステムにしか適用することができなかった. ここでは状態方程式 (1) で表わされたシステムに対して非線形フィードバックのみでなく座標変換まで用いて厳密に線形化する方法について説明する. この線形化についてシステムが線形化されるための必要十分条件と, システムを線形化する座標変換と非線形フィードバックの求め方が非線形システム理論 (幾何学的アプローチ) [1,2] により得られている [1-5].

システム (1) に対して次の座標変換とフィードバックを考える (v は新しい入力).

$$\xi = T(x) \quad (14)$$

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v \quad (15)$$

ここで $T(x)$ は原点を原点に変換する ($T(0) = 0$) と仮定する. これにより状態方程式 (1) は

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{dx}{dt} \\ &= \frac{\partial T}{\partial x} \{f(T^{-1}(\xi)) + g(T^{-1}(\xi))\alpha(T^{-1}(\xi))\} \\ &\quad + \frac{\partial T}{\partial x} g(T^{-1}(\xi))\beta(T^{-1}(\xi))v \\ &= \bar{f}(\xi) + \bar{g}(\xi)v \end{aligned} \quad (16)$$

となる. このとき

$$\bar{f}(\xi) = A\xi, \quad \bar{g}(\xi) = B \quad (17)$$

かつ (A, B) 可制御となるように座標変換 (14) とフィードバック (15) が求められるならば, システムを ξ 座標系で厳密に線形システムと一致させることができる. この線形化は近似ではなく厳密な線形化である.

この線形化されたシステムに対しては線形制御理論を用いてコントローラーを設計することができる. 例えば, 状態フィードバック

$$v = F\xi \quad (18)$$

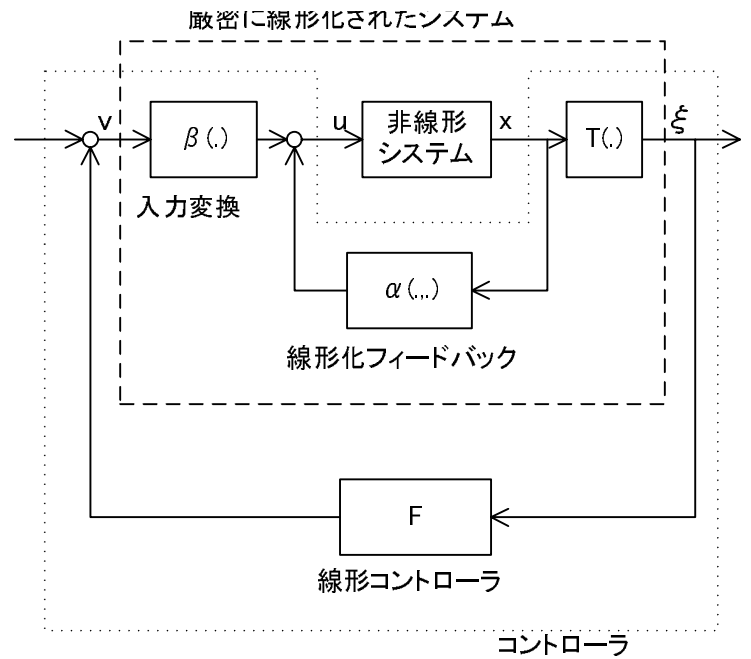


図 6: 非線形フィードバックと座標変換を用いた線形化による制御系

を設計すれば, 元のシステムに対するコントローラーは

$$\begin{aligned} u &= \alpha(x) + \beta(x)F\xi \\ &= \alpha(x) + \beta(x)FT(x) \end{aligned} \quad (19)$$

となる. 座標変換 (14) が原点を原点に写像することから $\xi \rightarrow 0$ ならば $x \rightarrow 0$ である. つまり, 線形化されたシステムを安定化するフィードバック (18) に基づいて設計されたフィードバック (19) は元のシステム (1) を安定化する.

この制御系の概要を図 6 に示す. この線形化のイメージは図 7 のように元の曲線 (非線形システム) を座標を変えて直線 (線形システム) にすることである. もちろん, さらに図 5 に示した入力による非線形部分の補償が必要な場合にはこれを行なう.

【定理】 ([1,2,4])

状態方程式 (1) に対して座標変換 (14), フィードバック (15) が存在して閉ループ系が (17) を満たす (線形化される) ための必要十分条件は次の 2 つを同時に満たすことである.

- $\{ad_f^0 g, ad_f^1 g, ad_f^2 g, \dots, ad_f^{m-1} g\}(x)$ がすべての x において線形独立
- $\{ad_f^0 g, ad_f^1 g, ad_f^2 g, \dots, ad_f^{m-2} g\}(x)$ がインボリュートイブ

ここで $ad_f^i g(x)$ は

$$ad_f^0 g = g(x) \quad (20)$$

$$ad_f^{i+1}g = [f, ad_f^i g] \quad (21)$$

$$[f, g] = \frac{\partial g}{\partial x} f(x) - \frac{\partial f}{\partial x} g(x) \quad (22)$$

と定義される縦ベクトル値関数である。\$[f, g](x)\$ は Lie bracket と呼ばれるもので、2つの縦ベクトル値関数から縦ベクトル値関数を与えるものである。

また \$\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_r(x)\}\$ がインボリュティブであるとはスカラー関数 \$\gamma_i^{j,k}(x)\$ が存在して

$$[f_j, f_k] = \sum_{i=1}^r \gamma_i^{j,k}(x) f_i(x) \quad (23)$$

と表わされることである(定理の簡単な証明は付録で示す)。

定理の条件 (a) は線形システムでは \$\{B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B\}\$ がフルランクになることであり、ある種の可制御性の条件と考えることができる。また定理の条件 (b) は \$n \le 2\$ の場合は常に満たされる (\$[ad_f^0 g, ad_f^0 g] \equiv 0\$ より、\$\{ad_f^0 g\}\$ のみからなる縦ベクトル値関数の集合は常に involutive である) ので、おおまかに言えば \$n \le 2\$ かつ可制御なシステムは常にこの方法で厳密に線形化することができることになる。

定理の条件が成り立つとき線形化するための座標変換とフィードバックは次のように求められる。Frobenius の定理 [1,2] によれば本定理の条件のもとで

$$L_{ad_f^i g} \phi(x) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n-2 \quad (24)$$

$$L_{ad_f^{n-1} g} \phi(x) \neq 0 \quad (25)$$

(連立偏微分方程式) を満たす関数 \$\phi(x)\$ が必ず存在する。ここで \$L_f h(x)\$ は Lie 微分で

$$L_f h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} f(x) \quad (26)$$

$$L_f^1 h(x) = L_f h(x) \quad (27)$$

$$L_f^{i+1} h(x) = L_f \{L_f^i h(x)\} \quad (28)$$

で定義されている。(24) (25) を満たす \$\phi(x)\$ を用いて座標 \$\xi\$ を

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi(x) \\ L_f \phi(x) \\ L_f^2 \phi(x) \\ \vdots \\ L_f^{n-1} \phi(x) \end{pmatrix} \quad (29)$$

と定義し、フィードバック (15) を

$$u = -\frac{L_f^n \phi(x)}{L_g L_f^{n-1} \phi(x)} + \frac{1}{L_g L_f^{n-1} \phi(x)} v \quad (30)$$

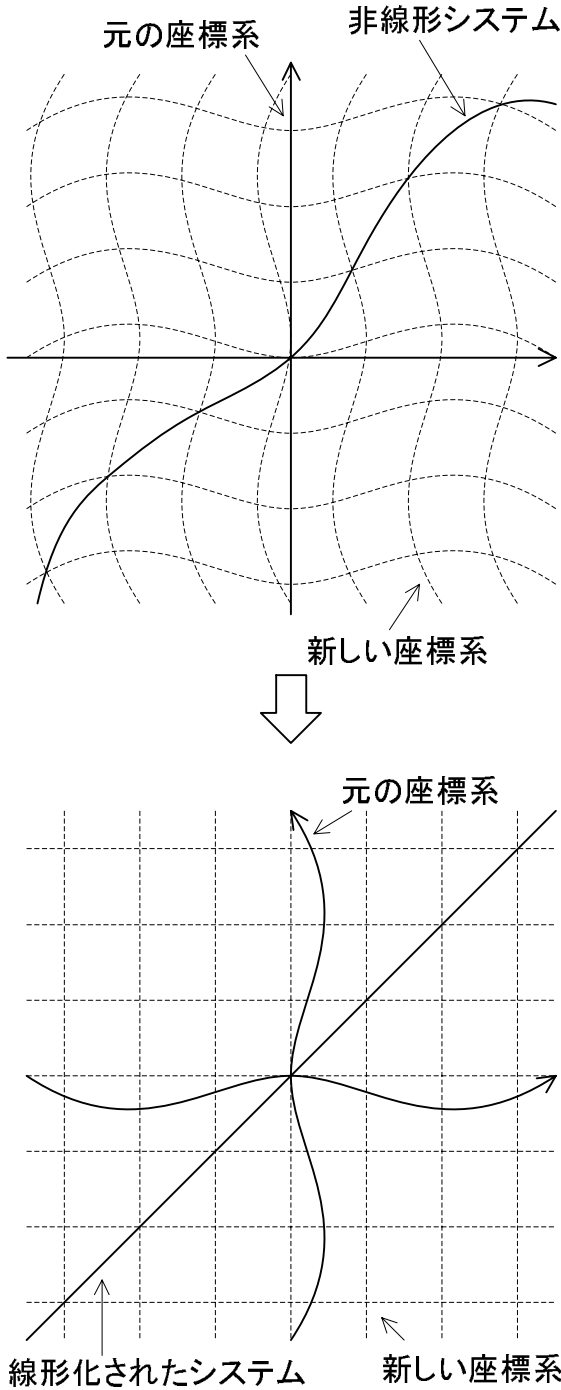


図 7: 非線形フィードバックと座標変換を用いた線形化のイメージ

とすると閉ループ系は

$$\frac{d\xi}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \xi + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} v \quad (31)$$

となり，線形システムとなることが容易に確かめられる．

[例題]

次のシステムを考える．このシステムは我々がけん引車両の経路追従制御のときに用いた非線形状態方程式である [6]．

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tan(x_3) \\ -\frac{\tan(x_2)}{\cos(x_3)} \\ \frac{\tan(x_2)}{\cos(x_3)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\cos(x_2)\cos(x_3)} \\ 0 \end{pmatrix} u \quad (32)$$

この状態方程式に対して厳密な線形化手法を適用する．

まず，(32) について，定理の線形化可能条件を調べる．

$$\begin{aligned} ad_f^0 g(x) &= g(x) \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\cos(x_2)\cos(x_3)} \\ 0 \end{pmatrix} \\ ad_f^1 g(x) &= [f, g](x) \\ &= \frac{\partial g}{\partial x} f(x) - \frac{\partial f}{\partial x} g(x) \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\cos(x_2)\cos(x_3) + \sin(x_2)\sin(x_3)}{\cos^2(x_2)\cos^3(x_3)} \\ -\frac{1}{\cos^3(x_2)\cos^2(x_3)} \end{pmatrix} \\ ad_f^2 g(x) &= [f, ad_f^1 g](x) \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial x} ad_f^1 g \right] f(x) - \frac{\partial f}{\partial x} ad_f^1 g(x) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos^3(x_2)\cos^4(x_3)} \\ * \\ * \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ここで，* は，適当な関数である（以下同様）．これらより ” $\{ad_f^0 g(0), ad_f^1 g(0), ad_f^2 g(0)\}$ は線形独立” であり，定理の条件 (a) が満たされている．また

$$\begin{aligned} [ad_f^0 g, ad_f^0 g](x) &= 0 \\ [ad_f^1 g, ad_f^1 g](x) &= 0 \\ [ad_f^0 g, ad_f^1 g](x) &= [g, ad_f^1 g](x) \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial x} ad_f^1 g \right] g(x) - \frac{\partial g}{\partial x} ad_f^1 g(x) \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ * \\ * \end{pmatrix} \in \text{span}\{ad_f^0 g, ad_f^1 g\}$$

$$[ad_f^1 g, ad_f^0 g](x) = -[ad_f^0 g, ad_f^1 g](x)$$

より，各状態 x において $\{ad_f^0 g(x), ad_f^1 g(x)\}$ のすべての組合せの Lie bracket が $ad_f^0 g(x)$ と $ad_f^1 g(x)$ の線形結合で表わされることがわかる．つまり ” $\{ad_f^0 g(x), ad_f^1 g(x)\}$ は involutive” であり，定理の条件 (b) が満たされている．よって (32) の非線形状態方程式は厳密に線形化可能である．

次に状態方程式を厳密に線形化する座標変換 (29) とフィードバック (30) を求めるために (24)(25) を満たす $\phi(x)$ を求める．(24) の左辺を計算すれば

$$\begin{aligned} L_{ad_f^0 g} \phi(x) &= \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \frac{\partial \phi}{\partial x_2}, \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \right) ad_f^0 g(x) \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \frac{1}{\cos(x_2)\cos(x_3)} \\ L_{ad_f^1 g} \phi(x) &= \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \frac{\partial \phi}{\partial x_2}, \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \right) ad_f^1 g(x) \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \frac{\cos(x_2)\cos(x_3) + \sin(x_2)\sin(x_3)}{\cos^2(x_2)\cos^3(x_3)} \\ &\quad - \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \frac{1}{\cos^3(x_2)\cos^2(x_3)} \end{aligned}$$

となる．(24) を満たすためにはこれらが 0 でなければならぬから $\phi(x)$ は

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial x_3} = 0$$

を満たさなければならない．また (25) より $\phi(x)$ が定数ではないことから $\partial \phi / \partial x \neq 0$ でなければならない．よって

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_1} \neq 0$$

を得る．このような $\phi(x)$ として

$$\phi(x) = x_1$$

を選べば (29) と (30) より状態方程式を厳密に線形化する座標変換とフィードバックは

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi(x) \\ L_f \phi(x) \\ L_f^2 \phi(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \tan(x_3) \\ \frac{\tan(x_2)}{\cos^3(x_3)} \end{pmatrix} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} u &= -\frac{L_f^3 \phi(x)}{L_g L_f^2 \phi(x)} + \frac{1}{L_g L_f^2 \phi(x)} v \\ &= -\cos(x_2) \{3 \sin^2(x_2) \tan(x_3) - \tan(x_2)\} \\ &\quad + \cos^3(x_2) \cos^4(x_3) v \end{aligned} \quad (34)$$

と計算される．このとき次の Lie 微分の計算を用いた．

$$L_f \phi(x) = \frac{\partial \phi}{\partial x} f(x) = \tan(x_3)$$

$$\begin{aligned}
L_f^2 \phi(x) &= L_f \{L_f \phi(x)\} = \left[\frac{\partial}{\partial x} \tan(x_3) \right] f(x) \\
&= \frac{\tan(x_2)}{\cos^3(x_3)} \\
L_f^3 \phi(x) &= L_f \{L_f^2 \phi(x)\} \\
&= \frac{3 \sin^2(x_2) \tan(x_3) - \tan(x_2)}{\cos^2(x_2) \cos^4(x_3)} \\
L_g L_f^2 \phi(x) &= \frac{1}{\cos^3(x_2) \cos^4(x_3)}
\end{aligned}$$

座標変換 (33) とフィードバック (34) により状態方程式が厳密に線形化されることは次のように確かめられる。(32), (33), (34) より

$$\begin{aligned}
\frac{d\xi_1}{dt} &= \frac{dx_1}{dt} = \tan(x_3) = \xi_2 \\
\frac{d\xi_2}{dt} &= \frac{d}{dt} \tan(x_3) = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_3} \tan(x_3) \right\} \frac{dx_3}{dt} \\
&= \frac{1}{\cos^2(x_3)} \frac{\tan(x_2)}{\cos(x_3)} = \frac{\tan(x_2)}{\cos^3(x_3)} = \xi_3 \\
\frac{d\xi_3}{dt} &= \frac{d}{dt} \frac{\tan(x_2)}{\cos^3(x_3)} \\
&= \left\{ \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\tan(x_2)}{\cos^3(x_3)} \right\} \frac{dx_2}{dt} + \left\{ \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{\tan(x_2)}{\cos^3(x_3)} \right\} \frac{dx_3}{dt} \\
&= \frac{3 \sin^2(x_2) \tan(x_3) - \tan(x_2)}{\cos^2(x_2) \cos^4(x_3)} \\
&\quad + \frac{1}{\cos^3(x_2) \cos^4(x_3)} u \\
&= v
\end{aligned}$$

となり、これらをまとめて次の線形状態方程式を得る。

$$\frac{d\xi}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xi + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} v$$

この線形化は座標変換 (33) とフィードバック (34) が存在する範囲内でのみ有効となる。座標変換 (33) は $\tan(x_2)$ と $\tan(x_3)$ を含んでいるので有効範囲は $-\pi/2 < x_2 < \pi/2$, $-\pi/2 < x_3 < \pi/2$ である。

安定化コントローラは、この線形状態方程式に線形コントローラを設計すればよい。例えば状態フィードバック

$$\begin{aligned}
v &= F\xi \\
&= \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \end{pmatrix} \xi
\end{aligned}$$

を設計すれば、これは (33), (34) より

$$\begin{aligned}
u &= -\cos(x_2) \{3 \sin^2(x_2) \tan(x_3) - \tan(x_2)\} \\
&\quad + \cos^3(x_2) \cos^4(x_3) v \\
v &= f_1 x_1 + f_2 \tan(x_3) + f_3 \frac{\tan(x_2)}{\cos^3(x_3)}
\end{aligned}$$

により実現される。

6 厳密な線形化を用いてロバストな制御系を設計するために

厳密な線形化手法を用いてロバストな制御系を設計したい場合には、線形化した後の線形コントローラの設計に若干の工夫が必要である。基本的には線形制御理論を用いて線形化されたシステムに対してロバストな制御系（例えば LQ 最適制御や H_∞ 制御）を設計すれば全体としてロバストな制御系を設計できると考えられる。しかし、厳密な線形化手法は座標変換とフィードバックを用いてシステムのダイナミクスを矯正しているため、線形化されたシステムに対してロバストな線形コントローラを単に設計しただけでは元の非線形システムに対してロバストなコントローラを設計していることにはならない場合があるので注意が必要である。

例えば LQ 最適制御を基本としたロバストなコントローラを設計したいならば次のようにしなければならない。

まずはじめに元の非線形状態方程式 (1) のテラー展開の 1 次近似線形化モデル (5) を求め、これに対して LQ 最適制御 $u = F_0 x$ を求める。1 次近似モデルは近似モデルではあるが座標変換もフィードバックも用いていないため、少なくとも原点近傍のシステムの挙動は一番よく表わしているモデルである。そのため、この 1 次近似モデルを用いて設計した LQ 最適制御は少なくとも原点近傍では LQ 最適であり、かつロバストな制御則になっているはずである。

一方、厳密な線形化手法を用いてコントローラを設計する場合、線形化されたシステムに対するフィードバックを (18) とすれば（フィードバックゲイン F ）、最終的な非線形コントローラは (19) となる。この非線形コントローラの原点近傍でのテラー展開の 1 次近似は

$$u = \left\{ \frac{\partial \alpha}{\partial x} \Big|_{x=0} + \beta(0) F \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} \right\} x + O^2(x) \quad (35)$$

となる（ここで $f(0) = 0$ より $\alpha(0) = 0$ となることと $T(0) = 0$ を用いた）。この 1 次近似（ $O^2(x)$ を無視したもの）が先ほど求めた 1 次近似モデルに対する LQ 最適フィードバック $u = F_0 x$ と一致するように F を決定すれば、非線形コントローラ (19) は少なくとも原点の近くでは LQ 最適フィードバックとほぼ等しくなり、原点近くでは LQ 最適制御と同等のロバスト性が得られる。

7 ρ 次近似線形化

前章の状態方程式の厳密な線形化は近似を用いていないのでシステムの厳密な解析や制御系の設計に有用であるが、線形化できるシステムが限られている。一方、テ

ラー展開の1次近似は適用できるシステムは多いが、精度があまり良くない。そのため2つの中間として次の ρ 次近似線形化が提案された。

ρ 次線形化問題 [1,7] とはシステムを座標変換とフィードバックによりテラー展開の ρ 次まで線形化するものである。つまり閉ループ系 (16) が次式のようになるように座標変換 (14) とフィードバック (15) を求める問題である。

$$\frac{d\xi}{dt} = A\xi + Bv + O^{\rho+1}(\xi, v) \quad (36)$$

システムが ρ 次近似線形化されるための必要十分条件と、線形化する座標変換とフィードバックの求め方は文献 [1,7] で得られているが詳細は省略する。

8 おわりに

ここでは非線形システムに対する状態フィードバックによる制御系の安定性について解説した。特に厳密な線形化を用いた状態フィードバックの設計法は非線形性が大きく、状態が大きく変化するようなシステム（平衡点を大きく変えて制御するようなシステムを含む）に特に有効であり、国内でも実プラントへの応用を検討する研究が発表されている（文献 [6] の参考文献を参照）。しかし、状態方程式の厳密な線形化は定理に示したように適用できるシステムに限りがある。そのため、ここで解説した ρ 次近似線形化の他、線形化の有効範囲を広げるために、平衡点が変わってもシステムの応答が極端に変わらないようにする近似線形化手法（extended linearization [8 - 10] や pseudolinearization [11]、これらはテラー展開の1次近似を基礎としている）も提案されている。

参考文献

- [1] 石島, 石動, 三平, 島, 山下, 渡辺: 非線形システム論, 計測自動制御学会 (1993)
- [2] A.Isidori: Nonlinear Control Systems, Springer-Verlag (1st ed. 1985, 2nd ed. 1989)
- [3] B.Jakubczyk and W.Respondek: On Linearization of Control Systems, Bull. Acad. Polonaise Sci. Ser. Sci. Math., vol.28, 517/522 (1980)
- [4] R.Su: On the Linear Equivalents of Nonlinear Systems, Systems and Control Letters, vol.2, no.1, 48/52 (1982)
- [5] L.R.Hunt, R.Su and G.Meyer: Design for Multi-Input Nonlinear Systems, in R.W.Brockett et al. Eds., Differential Geometric Control Theory, Birkhauser (1982)

- [6] 三平: 厳密な線形化とそのけん引車両の軌道制御への応用, 計測と制御, 31-8, 851/858 (1992)
- [7] A.J.Krener: Approximate Linearization by State Feedback and Coordinate Change, Systems and Control Letters, vol.5, 181/185 (1984)
- [8] W.T.Baumann and W.J.Rugh: Feedback Control of Nonlinear Systems by Extended Linearization, IEEE Trans. on Automatic Control, vol.AC-31, no.1, 40/46 (1986)
- [9] W.J.Rugh: An Extended Linearization Approach to Nonlinear System Inversion, IEEE Trans. on Automatic Control, vol.AC-31, no.8, 725/733 (1986)
- [10] W.T.Baumann and W.J.Rugh: Feedback Control of Analytic Nonlinear Systems by Extended Linearization, SIAM J. of Control and Optimization, vol.25, no.5, 1341/1352 (1987)
- [11] C.Reboulet and C.Champetier: A New Method for Linearizing Non-Linear System: the Pseudolinearization, Int. J. of Control, vol.40, no.4, 631/638 (1984)

A 厳密な線形化の定理の証明と微分幾何学

まず、非線形システム (1) を座標変換を用いて

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_{n-1} \\ \xi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_2 \\ \xi_3 \\ \vdots \\ \xi_n \\ a(\xi) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(\xi) \end{pmatrix} u \quad (37)$$

と変換することを考える．このシステムは線形システムにおける Luenberger の第 2 正準形にあたる．ここで、もし $b(\xi) \neq 0$ であるならばこのシステムに対して入力変換

$$u = \frac{-a(\xi)}{b(\xi)} + \frac{1}{b(\xi)} v \quad (38)$$

を定義することにより (37) は

$$\frac{d\xi}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \xi + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} v \quad (39)$$

となる．これは非線形システム (1) が座標変換と入力変換により線形化されたことを示している（逆にシステムが線形化可能であるならば (37) に変換する座標変換が必ず存在する）．

このように厳密な線形化問題の本質は非線形システム (1) を (37) に変換する座標変換を如何に求めるかにある．そこで、この座標変換をどのように求めるかについて考える．一般に (14) の座標変換は

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1(x) \\ T_2(x) \\ \vdots \\ T_n(x) \end{pmatrix} \quad (40)$$

と要素で書き表されるため、 n 個の関数 $T_i(x)$ を決定しなくてはならない．しかし、システム (37) では

$$\begin{aligned} T_2(x) &= \xi_2 = \frac{d\xi_1}{dt} = \frac{dT_1}{dt} \\ T_3(x) &= \xi_3 = \frac{d\xi_2}{dt} = \frac{dT_2}{dt} \\ &\vdots \\ T_n(x) &= \xi_n = \frac{d\xi_{n-1}}{dt} = \frac{dT_{n-1}}{dt} \end{aligned} \quad (41)$$

と表わされているので、 $T_2(x), T_3(x), \dots, T_n(x)$ は $T_1(x)$ が決まれば自動的に決定される．つまり、非線形システム

を (37) に変換する座標変換を求める問題は $T_1(x)$ という 1 つの関数を求める問題に帰着することができる．

まず (37) を満たす関数 $T_1(x)$ が存在するとして、この関数 $T_1(x)$ の満たすべき性質について考える．この $T_1(x)$ を時間 t で微分すれば

$$\begin{aligned} \frac{dT_1}{dt} &= \frac{\partial T_1}{\partial x} \frac{dx}{dt} \\ &= \frac{\partial T_1}{\partial x} \{f(x) + g(x)u\} \\ &= \frac{\partial T_1}{\partial x} f(x) + \frac{\partial T_1}{\partial x} g(x)u \end{aligned} \quad (42)$$

ここで

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} = \left(\frac{\partial T_1}{\partial x_1}, \frac{\partial T_1}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial T_1}{\partial x_n} \right) \quad (43)$$

となる．ところが (41) より $dT_1/dt = T_2(x)$ は x のみの関数 (u に無関係) でなければならないから

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} g(x) = 0, \quad T_2(x) = \frac{\partial T_1}{\partial x} f(x) \quad (44)$$

でなければならない．

これからこのような時間微分を繰り返す場合に、偏微分の記号を用いると煩雑になるの．そこで Lie 微分の定義 (28) を用いて

$$L_g T_1(x) = 0, \quad T_2(x) = L_f T_1(x) \quad (45)$$

と表わす．また $T_1(x)$ の時間微分を表した (42) は Lie 微分を用いると

$$\frac{dT_1}{dt} = L_f T_1(x) + u L_g T_1(x) \quad (46)$$

と簡単に表わされる．このように Lie 微分は関数の時間微分を表すために多く用いられる．例えば、状態 x の挙動がベクトル場 $f(x)$ によって

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad (47)$$

なる状態方程式で表されるとき、 $\phi(x)$ の時間微分は Lie 微分を用いて

$$\frac{d\phi}{dt} = L_f \phi(x) \quad (48)$$

で表される．

次に $T_2(x)$ を時間微分すれば

$$\begin{aligned} \frac{dT_2}{dt} &= L_f T_2(x) + u L_g T_2(x) \\ &= L_f^2 T_1 + u L_g L_f T_1 \end{aligned} \quad (49)$$

(41) より $dT_2/dt = T_3(x)$ は x のみの関数だから

$$L_g L_f T_1(x) = 0, \quad T_3(x) = L_f^2 T_1(x) \quad (50)$$

でなければならない．この操作を $n-1$ 回繰り返せば $T_1(x)$ が次を満たす必要があることが分かる．

$$L_g L_f^i T_1(x) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n-2 \quad (51)$$

$$T_k(x) = L_f^{k-1} T_1(x), \quad k = 2, 3, \dots, n \quad (52)$$

一方 $\xi_n = T_n(x) = L_f^{n-1} T_1(x)$ を時間微分すれば

$$\frac{d\xi_n}{dt} = L_f^n T_1(x) + u L_g L_f^{n-1} T_1(x) \quad (53)$$

となる．これを (37) と比べれば

$$L_f^n T_1(x) = a(x) \quad (54)$$

$$L_g L_f^{n-1} T_1(x) = b(x) \neq 0 \quad (55)$$

でなければならないことが分かる．このとき最終的にシステムを線形とする入力変換 (38) は

$$u = -\frac{L_f^n T_1(x)}{L_g L_f^{n-1} T_1(x)} + \frac{1}{L_g L_f^{n-1} T_1(x)} v \quad (56)$$

となる． $T_1(x)$ を (24)(25) を満たす $\phi(x)$ と考えれば，このフィードバックは (30) に対応している．

さて，非線形システム (1) を線形化するためには (51)(55) を満たす関数 $T_1(x)$ を見つけなくてはならない．しかし (51)(55) は Lie 微分を繰り返す，つまり偏微分を繰り返しているので $T_1(x)$ を見つけるのは容易ではない．そこで (51)(55) をもう少し簡単にするために Lie bracket (22) を用いる．簡単な計算より，Lie bracket は以下の性質を満たすことが証明できる．

$$L_f L_g \phi(x) - L_g L_f \phi(x) = L_{[f,g]} \phi(x) \quad (57)$$

これを用いれば (51) の $i = 1$ の場合は次のように変形できる．

$$\begin{aligned} 0 &= L_g L_f T_1(x) \\ &= L_f L_g T_1(x) - L_{[f,g]} T_1(x) \\ &= -L_{ad_f^1 g} T_1(x) \end{aligned} \quad (58)$$

ただし，(51) の $i = 0$ の場合より $L_g T_1(x) = 0$ であることを用いた．同様に $i = 2$ の場合には

$$\begin{aligned} 0 &= L_g L_f^2 T_1(x) \\ &= L_f L_g L_f T_1(x) - L_{[f,g]} L_f T_1(x) \\ &= -L_f L_{[f,g]} T_1(x) + L_{[f,[f,g]]} T_1(x) \\ &= -L_f L_{ad_f^1 g} T_1(x) + L_{ad_f^2 g} T_1(x) \\ &= L_{ad_f^2 g} T_1(x) \end{aligned} \quad (59)$$

となる．ここで (51) より $L_g L_f T_1(x) = 0$ ，(58) より $L_{ad_f^1 g} T_1(x) = 0$ であることを用いた．この操作を繰り返すと (51) と (55) は

$$L_{ad_f^i g} T_1(x) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n-2 \quad (60)$$

$$L_{ad_f^{n-1} g} T_1(x) \neq 0 \quad (61)$$

と同値であることが分かる．ここで Lie 微分を繰り返し行なう必要があった条件が Lie bracket を用いることにより 1 回の Lie 微分で良くなっていることに注意する．これは高階の偏微分が必要なくなったことを示している．

さて，この条件の他に非線形システム (1) が (37) に変換されるためには

$$\begin{aligned} &”ベクトル場 $ad_f^0 g(x), ad_f^1 g(x), \dots, ad_f^{n-1} g(x)$ が
すべての x で線形独立” \end{aligned} \quad (62)$$

でなければならないことが知られている．これは定理の解説でも述べたようにシステムの可制御性の条件である．

以上をまとめると，システム (1) が座標変換により (37) に変換されるための必要条件は (62) が成り立ち，かつ (60)(61) を満たす $T_1(x)$ が存在することになる．

(62) が成り立っているとき (60)(61) を満たす $T_1(x)$ の存在する条件を簡単化するために Frobenius の定理を用いる．

Frobenius の定理によれば $\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_r(x)\}$ はすべての x において線形独立なベクトル場の集合するとき

$$L_{f_i} \phi_j(x) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (63)$$

を満たす $n - r$ 個の独立な関数 $\phi_j(x)$ ， $j = 1, 2, \dots, n - r$ が (局所的に) 存在する必要十分条件は $\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_r(x)\}$ が involutive であることである．(ここで関数 $\phi_j(x)$ が独立であるとは行ベクトル $\partial \phi_i / \partial x$ がすべての x で線形独立ということである)．このとき $\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_r(x)\}$ と独立な任意のベクトル場 $g(x)$ に対して

$$L_g \phi_k(x) \neq 0 \quad (64)$$

となる k ，($1 \leq k \leq n - r$) が存在する．

これを用いれば (62) が成り立っているとき (60)(61) を満たす $T_1(x)$ の存在する条件は

$$\begin{aligned} &” $\{ad_f^0 g(x), ad_f^1 g(x), \dots, ad_f^{n-2} g(x)\}$ が involutive” \end{aligned} \quad (65)$$

であることが分かる．

今までは線形化可能なための必要条件について考えてきたが，今までの議論の逆をたどることにより，これらの条件が十分条件であることが分かる．これらをまとめると本文の定理を得る．